FEUILLE DE TD N° 9

Théorème de Cayley-Hamilton, Lemme des noyaux

16 novembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit E un e.v. de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Enoncer 3 propriétés du polynôme caractéristique.
2. Enoncer 3 propriétés du polynôme minimal.
3. Enoncer 2 propriétés des sous-espaces propres.
4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux. Pour quels polynômes P le lemme des noyaux est-il intéressant ?
5. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \geq 1$ tels que $F = Ker((u - \lambda Id_E)^m) \neq \{0\}$. Que peut-on dire sur u_F ?

---

1. On a $\chi_u(X)$ unitaire, de degré n, avec $\chi_u(0) = (-1)^n \det(u)$. On a aussi Spec $(u) = \{$ racines de $\chi_u\}$ et $\chi_u(u) = 0$.
2. On a μ_u unitaire, avec $1 \leq \deg(\mu_u) \leq n$, $\mu_u \mid \chi_u$, et $P(u) = 0$ si et seulement si $\mu_u \mid P$.
3. Pour $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u qui n'est pas réduit à $\{0\}$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u) \leq \mu_u(\lambda)$.
   Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont deux à deux en somme directe.
   En notant $F = E_\lambda(u)$, on a $u_F = \lambda Id_F$. Donc, $\chi_{u_F}(X) = (X - \lambda)^{\dim(F)}$.
   On détermine $E_\lambda(u)$ en résolvant l'équation $u(x) = \lambda x$. On peut aussi déterminer la dimension du sous-espace propre avec des informations sur χ_u.
4. Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.
   Lemme des noyaux : Pour $P_1, \dots, P_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux, on a $Ker(P_1 \dots P_r(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(P_i(u))$.
   De plus, la projection $p_i \in \mathcal{L}(Ker(P_1 \dots, P_r(u)))$ sur $Ker(P_i(u))$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} Ker(P_j(u))$ est un polynôme en $u_{Ker(P_1 \dots, P_r(u))}$.
   Si $P = P_1 \dots P_r$ est un polynôme annulateur de u, on a alors :
   $$E = Ker(0) = Ker(P(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(P_i(u)).$$
   Cela donne une décomposition en somme directe de E, et chaque sous-ev $Ker(P_i(u))$ est stable par u.
   Pour B une base adaptée à cette décomposition en somme directe, la matrice $Mat_B(u)$ est diagonale par blocs (blocs de taille $\deg(P_i)$).
5. Le sous-ev F est stable par u. Sur ce sous-ev, l'endomorphisme induit $(u - \lambda Id_E)_F = u_F - \lambda Id_F$ est nilpotent. L'ordre r' de nilpotence de $u_F - \lambda Id_F$ vérifie $r' \leq m$.
   On a ainsi $\mu_{u_F}(X) = (X - \lambda)^{r'}$ et $\chi_{u_F}(X) = (X - \lambda)^{\dim(F)}$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
• On suppose que μ_u n'est pas scindé ou n'est pas à racines simples.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Donner un exemple. • On suppose que μ_u est scindé.
Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^n)$.
On note r_i la multiplicité de $(X - \lambda_i)$ dans μ_u. Donner une expression de F_i avec r_i.
Quel est le polynôme minimal de u_{F_i} ?
• On suppose que μ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
• On suppose que χ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ?

---

1. Si u est diagonalisable, avec $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on sait que $\mu_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
   Donc, μ_u est scindé à racines simples.
   Ainsi, si μ_u n'est pas scindé ou pas à racines simples, u n'est pas diagonalisable.
   Un exemple de tel endomorphisme est $X \mapsto AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On sait que $r_i \leq \deg(\mu_u) \leq \deg(\chi_u) = n$.
   Ainsi, d'après le cours, on a $F_i = Ker((u - \lambda_i Id)^n) = Ker((u - \lambda_i Id)^{r_i})$.
   Sur F_i, on a $(u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i})^{r_i} = 0$.
   Ainsi, $u_{F_i} - \lambda_i Id$ est nilpotent. D'après le cours, on sait que son indice est exactement r_i.
   Ainsi, le polynôme minimal de u_{F_i} est $\mu_{u_{F_i}}(X) = (X - \lambda_i)^{r_i}$.
3. Les racines de μ_u sont les valeurs propres de u. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, comme μ_u est scindé à racines simples, on a ainsi $\mu_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.
   En utilisant le lemme des noyaux pour χ_u, on obtient :
   $$E = Ker(\chi_u(u)) = \oplus_{i=1}^r Ker(u - \lambda_i Id_E).$$

L'espace E est une somme directe des sous-espaces propres de u, donc u est diagonalisable.

4. Les polynômes χ_u et μ_u ont les mêmes racines. Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on a $\Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i) \mid \mu_u$.
   Comme χ_u est scindé à racines simples, on a ainsi $r = n$ et $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.
   Cela donne $\mu_u \mid \chi_u$ et $\chi_u \mid \mu_u$, donc $\mu_u = \chi_u$.
   Donc, u est diagonalisable.

Exercice 3. Soit E un ev de dimension m. Soient $d, s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s est nilpotent.

1. On prend $d = \lambda Id_E$. Montrer que l'on a $ds = sd$, puis que $\chi_d = \chi_{d+s}$. (On pourra se servir de $\chi_s(X)$)
2. On suppose $ds = sd$. Pour $Spec(d) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$. Quelles sont les valeurs de $\chi_{d_{F_i}}$ et $\chi_{d_{F_i}+s_{F_i}}$?
3. On suppose d diagonalisable et $ds = sd$. Montrer que l'on a $\chi_d = \chi_{d+s}$.
4. Est-ce encore vrai si $ds \neq sd$? (Si oui, le montrer. Si non, trouver un contre-exemple.)

---

1. On a $ds = \lambda s = sd$. Les deux endomorphismes commutent.
   Comme s est nilpotent, d'après le cours on sait que $\chi_s(X) = X^n$.
   C'est-à-dire, on a :
   $$\det(XId_E - s) = X^n$$
   Donc
   $$\det(XId_E - (d+s)) = \det((X-\lambda)Id_E - s) = (X-\lambda)^n$$
   Ainsi, on a $\chi_{d+s}(X) = (X-\lambda)^n = \chi_d(X)$.
2. Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de d, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$.
   Chaque sous-ev F_i est stable par d. Comme s commute avec d, chaque noyau $Ker(d - \lambda_i Id_E)$ est stable par s.
   Donc, les endomorphismes induits d_{F_i} et s_{F_i} sont bien définis. Sur le sous-espace F_i, on a $d_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i}$.
   De plus, comme s est nilpotent, s_{F_i} est nilpotent.
   Avec la question 1), on a donc
   $$\chi_{d_{F_i}}(X) = (X-\lambda)^{\dim(F_i)} = \chi_{d_{F_i}+s_{F_i}}(X).$$
3. Maintenant, d est diagonalisable. Par théorème sur la diagonalisabilité, on a $E = \oplus_{i=1}^r F_i$.
   Avec les résultats de cours sur le polynôme caractéristique et les endomorphismes induits, on a
   $$\chi_d(X) = \Pi_{i=1}^r \chi_{d_{F_i}}(X) \text{ et } \chi_{d+s}(X) = \Pi_{i=1}^r \chi_{d_{F_i}+s_{F_i}}(X).$$
   On en déduit donc avec la question 2) que $\chi_d(X) = \chi_{d+s}(X)$.
4. Le résultat est faux si d et s ne commutent pas (quand s ne laisse pas stables les sous-espaces propres de d). Voici un contre-exemple :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   La première matrice est diagonalisable, de valeurs propres 1 et 2 et de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 3$. La deuxième matrice est nilpotente. La somme de ces deux matrices a pour polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 1$.
   Le polynôme caractéirstique et les valeurs propres de $d + s$ sont ainsi différents de ceux de d.

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme minimal de $J_n(\lambda)$.

On remarque que $J_n(\lambda)$ est de la forme $\lambda I_n + N$. Trouver le polynôme minimal de $J_n(\lambda)$ est la même chose que trouver le polynôme minimal de $J_n(\lambda) - \lambda I_n = N$.

La matrice N est triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale. Son polynôme caractéristique est donc X^n, et cette matrice est nilpotente. On cherche donc l'indice de nilpotence de N (l'entier r tel que $\mu_n(X) = X^r$).

Posons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On remarque que l'on a $N(e_1) = 0$ et $N(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$. Alors, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a $N^k(e_n) = e_{n-k} \neq 0$, c'est-à-dire $N^k \neq 0$.

Comme on a $\chi_N(N) = N^n = 0$, l'indice de nilpotence de N est donc n. C'est-à-dire, on a $\mu_N(X) = X^n = \chi_N(X)$.

On obtient ainsi que $\mu_{J_n(\lambda)} = (X-\lambda)^n$.

Exercice 5. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

---

1. On a montré en cours que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, en posant $F = S_u(x)$, on a $\mu_{u_F}(X) = \chi_{u_F}(X) = P(X)$, pour P un polynôme de degré $\dim(F)$.
Ainsi, si $E = S_u(x)$ pour un certain $x \in E$, on a $\mu_u = \mu_{u_E} = \chi_{u_E} = \chi_u$. Le polynôme minimal de u est de degré n.
2. Dans ce cas, on a $\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ et $\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.
Comme chaque sous-espace propre $E_i = Ker(u - \lambda_i Id)$ est de dimension au moins 1 et comme on a $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ (d'après le lemme des noyaux et d'après le théorème sur la diagonalisation), tous les sous-espaces propres de u sont donc de dimension 1.
Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres de u pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors, d'après le cours, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
On pose $x = e_1 + \dots + e_n$. Montrons qu'on a $S_u(x) = E$.
Il faut donc montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (et donc une base de E).
Trouver des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ est équivalent à trouver un polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ de degré au plus $n - 1$ tel que $P(u)(x) = 0$.
Comme les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de u, on a :
$$P(u)(x) = P(u)(e_1 + \dots + e_n) = P(u)(e_1) + \dots + P(u)(e_n) = P(\lambda_1)e_1 + \dots + P(\lambda_n)e_n.$$
Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a $P(u)(x) = 0$ si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Or, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i si et seulement si $(X - \lambda_i) \mid P$ pour tout i, si et seulement si $\mu_u = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \mid P$.
Comme on cherche P avec $\deg(P) \leq n - 1 < \deg(\mu_u)$, le seul polynôme P possible est $P(X) = 0$.
Donc, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Autre méthode : On a $u(x) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Ainsi, pour tout $k \geq 0$, on a $u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$.
Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.
Posons $y = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$.
Les coordonnées du vecteur y dans la base B sont ainsi :
$$(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i)$$
On reconnaît les coefficients d'une matrice de Vandermonde :
Posons $M = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de Vandermonde associée aux nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Alors, pour $X = {}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$, on a :
$$MX = {}^t(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i).$$
Comme les nombres λ_i sont tous distincts, la matrice de Vandermonde M est inversible.
Donc, on a $y = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X = 0$, si et seulement si $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$.
Cela démontre que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. Soit E un ev de dimension n. Soit $P \in \mathcal{K}[X]$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Déterminer $\chi_{P(g)}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\chi_{P(\lambda Id_E + g)} = (X - P(\lambda))^n$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. On pose $Spec(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Déterminer $\chi_{P(u)}$. (On pourra utiliser $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.)

---

1. Comme g est nilpotent, d'après le cours on a $\chi_g(X) = X^n$.
Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$.
On a $P(g) = a_0 Id_E + a_1 g + \dots + a_m g^m$.
Or, on a $a_1 g + \dots + a_m g^m = g(a_1 + \dots + a_m g^{m-1})$. Comme g est nilpotent, cet endomorphisme est lui aussi nilpotent.
Ainsi, l'endomorphisme $P(g) - a_0 Id_E$ est nilpotent.
Donc, le polynôme caractéristique de $P(g) - a_0 Id_E$ est X^n :
$$\det(X Id_E - (P(g) - a_0 Id_E)) = X^n.$$
On obtient donc :
$$\det(X Id_E - P(g)) = \det((X - a_0) Id_E - (P(g) - a_0 Id_E)) = (X - a_0)^n.$$
Comme $a_0 = P(0)$, on a aussi : $\chi_{P(g)}(X) = (X - P(0))^n$.
2. On veut utiliser le résultat de la question 1.
Dans la base $(1, (X - \lambda), (X - \lambda)^2, \dots)$ de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme P s'écrit :
$$P(X) = b_0 + b_1(X - \lambda) + \dots + b_m(X - \lambda)^m.$$
On a alors : $P(\lambda Id_E + g) = b_0 Id_E + b_1 g + \dots + b_m g^m$.
D'après les calculs de la question 1), on voit alors que $P(\lambda Id_E + g) - b_0 Id_E = g(b_1 + \dots + b_m g^{m-1})$ est un endomorphisme nilpotent.
Donc, on a $\chi_{P(\lambda Id_E + g) - b_0 Id_E}(X) = X^n$ d'après le cours.
Donc, on a
$$\chi_{P(\lambda Id_E + g)}(X) = (X - b_0)^n.$$
De plus, on remarque que $b_0 = P(\lambda)$, ce qui s'écrit : $\chi_{P(g)} = (X - P(\lambda))^n$.
3. On a $\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_u(\lambda_i)}$.
On pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.
D'après le lemme des noyaux, on a
$$E = Ker(0) = Ker(\chi_u(u)) = \oplus_{i=1}^r F_i.$$

Les sous-espaces F_i sont stables par u, donc ils sont stables par $P(u)$.
D'après le cours, on a ainsi :

$$\chi_{P(u)} = \Pi_{i=1}^r \chi_{P(u_{F_i})}.$$

On va déterminer chaque $\chi_{P(u_{F_i})}$.
Soit $1 \leq i \leq r$. Comme on a $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$, l'endomorphisme $g_i = u_{F_i} - \lambda_i Id_{F_i}$ (endomorphisme sur F_i) est donc nilpotent.
En effet, pour tout $x \in F_i$, on a $g_i^{m_u(\lambda_i)}(x) = (u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)}(x) = 0$.
On en déduit que u_{F_i} est de la forme : $u_{F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + g_i$, avec g_i nilpotent.
D'après la question 2), le polynôme caractéristique de $P(u_{F_i})$ est donc :

$$\chi_{P(u_{F_i})}(X) = (X - P(\lambda_i))^{\dim(F_i)}.$$

On conclut donc que

$$\chi_{P(u)}(X) = \Pi_{i=1}^r (X - P(\lambda_i))^{\dim(F_i)}.$$

En prenant $P(X) = X$, on doit avoir $\chi_{P(u)} = \chi_u$.
On en déduit donc que $\dim(F_i) = m_u(\lambda_i)$.
Le résultat s'écrit ainsi :

$$\chi_{P(u)}(X) = \Pi_{i=1}^r (X - P(\lambda_i))^{m_u(\lambda_i)}.$$