Feuille de TD n° 9

Théorème de Cayley-Hamilton, Lemme des noyaux

16 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un e.v. de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Enoncer 3 propriétés du polynôme caractéristique.
2. Enoncer 3 propriétés du polynôme minimal.
3. Enoncer 2 propriétés des sous-espaces propres.
4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux. Pour quels polynômes P le lemme des noyaux est-il intéressant ?
5. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \geq 1$ tels que $F = Ker((u - \lambda Id_E)^m) \neq \{0\}$. Que peut-on dire sur u_F ?

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
• On suppose que μ_u n'est pas scindé ou n'est pas à racines simples.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
Donner un exemple. • On suppose que μ_u est scindé.
Pour $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^n)$.
On note r_i la multiplicité de $(X - \lambda_i)$ dans μ_u. Donner une expression de F_i avec r_i.
Quel est le polynôme minimal de u_{F_i} ?
• On suppose que μ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
• On suppose que χ_u est scindé à racines simples.
Que vaut μ_u ?

Exercice 3. Soit E un ev de dimension m. Soient $d, s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s est nilpotent.

1. On prend $d = \lambda Id_E$. Montrer que l'on a $ds = sd$, puis que $\chi_d = \chi_{d+s}$. (On pourra se servir de $\chi_s(X)$)
2. On suppose $ds = sd$. Pour $Spec(d) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on pose $F_i = Ker(d - \lambda_i Id_E)$. Quelles sont les valeurs de $\chi_{d_{F_i}}$ et $\chi_{d_{F_i}+s_{F_i}}$?
3. On suppose d diagonalisable et $ds = sd$. Montrer que l'on a $\chi_d = \chi_{d+s}$.
4. Est-ce encore vrai si $ds \neq sd$? (Si oui, le montrer. Si non, trouver un contre-exemple.)

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$.
Déterminer le polynôme minimal de $J_n(\lambda)$.

Exercice 5. Soit E un ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6. Soit E un ev de dimension n. Soit $P \in \mathcal{K}[X]$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.

1. Déterminer $\chi_{P(g)}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\chi_{P(\lambda Id_E + g)} = (X - P(\lambda))^n$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. On pose $Spec(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.
   Déterminer $\chi_{P(u)}$. (On pourra utiliser $F_i = Ker((u - \lambda_i Id_E)^{m_u(\lambda_i)})$.)