Feuille de TD n° 1

Dénombrement - Sommabilité

7 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

• $E \setminus A$ est un ensemble à $n-p$ éléments.
Ainsi, l'ensemble de toutes ses parties, $\mathcal{P}(E \setminus A)$, a pour cardinal 2^{n-p}. C'est un ensemble à 2^{n-p} éléments.
• Soit $a \in A$ et E_a l'ensemble des parties de E qui ne contiennent que a comme élément de A.
On doit alors choisir $k-1$ éléments parmi les $n-p$ qui ne sont pas dans A.
D'où $|E_a| = \sum_{k=1}^{n-p} \binom{n-p}{k-1} = 2^{n-p}$, et E est l'union disjointe des E_a.
D'où le nombre recherché :

$$p2^{n-p}.$$

Autre méthode : On pose Ω l'ensemble des parties contenant un unique élément de A.
On définit la fonction $f : (X, a) \in \mathcal{P}(E \setminus A) \times A \mapsto X \cup \{a\} \in \Omega$.
On vérifie facilement que f est une bijection. On obtient donc que $Card(\Omega) = Card(\mathcal{P}(E \setminus A)).Card(A) = 2^{n-p}.p$.

Exercice 2. Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 1}$ est sommable.
2. Montrer que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   Que vaut sa somme $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{n(k+1)}$?
3. On pose $A_p = \{(n, k) \in \mathbb{N}^* \times N \text{ tq } n(k+1) = p\}$, pour $p \geq 1$.
   Vérifier que la famille $(A_p)_p$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
4. On pose $d(p)$ le nombre de diviseurs de p.
   Calculer $Card(A_p)$.
5. Montrer que l'on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

---

1. Il faut montrer que la série des $\frac{x^n}{1-x^n}$ est absolument convergente.
   Comme $|x| < 1$ et $n \geq 1$, on a $\frac{|x^n|}{|1-x^n|} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$. La série des $|x|^n$ est convergente (série géométrique).
   Donc, la série des $\frac{x^n}{1-x^n}$ est absolument convergente. D'après le cours, la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 0}$ est sommable.
2. On va montrer que $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} |x^{n(k+1)}|$ est finie.
   En effet, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} |x^{n+k}| = \dfrac{|x^n|}{1-|x|^n}$. Donc, $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} |x^{n(k+1)}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x^n|}{1-|x|^n} < +\infty$.
   D'après le cours, cela montre que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   De plus, sa somme vaut :
$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} x^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$
3. Les ensembles A_p sont non-vides, sont disjoints, sont inclus dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et toute paire (n, k) est incluse dans $A_{n(k+1)}$. Ils forment donc une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
   Il existe autant de couples (n, k) dans A_p que de divieurs de p, car $p = n(k+1)$. Donc, $Card(A_p) = d(p)$.
4. On applique alors le théorème de sommation par paquets à la partition A_p pour obtenir :
   Le théorème de sommation par paquets nous dit que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} x^{n(k+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k)\in A_p} x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p)x^p.$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les

boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

---

1. L'esemble Ω est :
   $$\Omega = \{(l_1, \dots, l_n) \in [\![1, n]\!] / \text{ tels que } \forall i \neq j,\ l_i \neq l_j\}$$
   On a donc $\mathrm{Card}(\Omega) = n!$
2. Pour un tirage qui contient la séquence '$1, 2, 3$', la position de la boule 1 sera alors dans $\{1, \dots, n-2\}$.
   Pour $1 \leq i \leq n-2$, on pose $A_i = \{$les tirages contiennent la séquence "1,2,3", et la boule 1 sort en position i$\}$.
   Chaque ensemble A_i est non-vide, et tout élément de A est inclus dans un A_i. Chaque ensemble A_i est inclus dans A. Deux ensembles A_i et A_j, pour $i \neq j$, sont disjoints. Donc, les A_i forment une partition de A.
   On a donc $Card(A) = \sum_i Card(A_i)$. Les positions $i, i+1, i+2$ contiennent donc la séquence '$1, 2, 3$. Il reste $n-3$ positions pour $n-3$ numéros. Cela donne $(n-3)!$ arrangements possibles. Donc, $Card(A_i) = (n-3)!$.
   Ainsi, $Card(A) = \sum_i (n-3)! = (n-2)(n-3)!$.
3. Soient $1 \leq i < j < k \leq n$.
   On pose $B_{(i,j,k)}$ l'ensemble des tirages avec 1 en position i, 2 en position j, 3 en position k.
   On remarque alors que $B_{(i,j,k)}$ est inclus dans B, que $B_{(i,j,k)}$ est non-vide, et que tout élément de B est dans un $B_{(i,j,k)}$. De plus, pour $(i, j, k) \neq (i', j', k')$, les ensembles $B_{(i,j,k)}$ et $B_{(i',j',k')}$ sont disjoints.
   La famille des $B_{(i,j,k)}$ est donc une partition de B.
   Calculons les cardinaux.
   Pour un tirage dans $B_{(i,j,k)}$, les positions i, j, k sont occupées par $1, 2, 3$. Il reste $n-3$ positions pour $n-3$ numéros. Cela donne $(n-3)!$ arrangements possibles. Donc, $Card(B_{(i,j,k)} = (n-3)!$.
   Calculons le nombre de triplets (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$.
   Choisir un tel triplet revient à choisir trois nombres parmi $\{1, \dots, n\}$. On a donc $\binom{n}{3}$ choix possibles.
   Ainsi, $Card(B) = \sum_{(i,j,k)} Card(B_{(i,j,k)} = \sum_{(i,j,k)} (n-3)! = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{6}$.
   Autre méthode : On pose $C_{(123)}, C_{(132)}, C_{(213)}, C_{(231)}, C_{(312)}, C_{(321)}$ les ensembles de tirages où 1,2,3 apparaissent dans l'ordre indiqué (pour $C_{(213)}$ on a 2 avant 1 et 1 avant 3).
   On a $B = C_{(123)}$.
   On remarque alors que ces ensembles sont disjoints, et forment une partition de Ω. De plus, ces ensembles sont de même cardinal (il suffit de permuter l'ordre de $1, 2, 3$ pour passer d'un ensemble à un autre).
   On a donc 6 ensembles de même cardinal qui forment une partition de Ω.
   Donc, ces ensembles sont de cardinal $\frac{Card(\Omega)}{6} = \frac{n!}{6}$.
   Ainsi, $Card(B) = \frac{n!}{6}$.

Exercice 4.

1. Vérifier que la famille des $A_k = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } n + p = k\}$, $k \geq 0$, forme une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On regarde la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} = (a_{n,p})$.
   Calculer $\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p}$.
3. En déduire tous les nombres réels α tels que la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Indiquer quel résultat du cours est nécessaire ici.
   Donner la valeur de la somme de la famille.

---

1. Chaque ensemble A_k est non-vide. Chaque ensemble A_k est inclus dans $\mathbb{N}^2$. Toute paire (n, p) est incluse dans A_{n+p}. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints. Ils forment bien une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. On a une série à termes positifs. Le calcul donne :
   $$\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p} = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$
   $$\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p} = \frac{(k+1)}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$
3. On a des séries à termes positifs. La somme des $\dfrac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}$ vaut $+\infty$ si $\alpha - 1 \geq 1$, et est finie sinon.

Ainsi, d'après le cours (théorème de sommation par paquets), la famille $\left(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ si et seulement si $\alpha > 2$.
Et, on a

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+p+1)^\alpha} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
2. Quel est l'ensemble $\bar{A}$?
3. Calculer $Card(\bar{A})$.
4. Calculer $Card(A)$.

---

1. Dans notre cas l'ensemble Ω est

$$\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$$

   On a donc $Card(\Omega) = 365^n$. Il y a 365^n répartitions possibles de dates d'anniversaires.
2. On a $A = \{$ « au moins deux invités ont la même date d'anniversaire » $\}$.
   Ainsi, $\bar{A} = \{$ « tous les invités on une date d'anniversaire différente »$\}$.

3. Pour une répartition de $\bar{A}$, il faut choisir n dates d'anniversaires différentes parmi 365. On a donc

$$Card(\bar{A}) = \binom{365}{n} = \begin{cases} \frac{365!}{(365-n)!} & \text{si } n \leq 365 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. On en déduit que $Card(A) = Card(\Omega) - Card(\bar{A}) = 365^n - \binom{365}{n}$.

Exercice 6.
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\sum_{n\geq 0} u_n^2 < +\infty$.

1. Montrer que pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $\sum_{n\geq 0} u_{\tau(n)}^2 = \sum_{n\geq 0} u_n^2$.
   On pourra utiliser les résultats de cours sur la sommabilité.
2. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$, $\forall n \geq 0$. Montrer que la famille $(v_n^2)_{n\geq 0}$ est sommable. Que vaut $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2$?
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} |u_n v_n|$?

---

1. La série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ est convergente. Donc, d'après le cours, la famille $(u_n^2)_{n\geq 0}$ est sommable.
   On en déduit donc d'après le cours que pour toute bijection σ sur $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}^2 = \sum_{n\geq 0} u_n^2$.
   Donc, la famille $(v_n)_n$ est sommable.
   On a donc, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$.
2. On sait que pour tous réels a et b, on a $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
   On en déduit donc que la série de terme $|u_n v_n|$ est convergente car celles de termes u_n^2 et v_n^2 le sont.

Exercice 7.

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

2. Pour quels nombres $\alpha > 1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ est-elle finie ?
3. On pose $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n,k), k \geq n+1\}$. On pose $a_{n,k} = \frac{1}{k^\alpha}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 1$ la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\Omega}$ est-elle sommable ?
4. Montrer qu'on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

   On pourra écrire autrement l'ensemble Ω et utiliser le théorème de Fubini.

---

1. Pour $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante. En sommant, ou en utilisant directement le théorème de comparaison série intégrale on obtient
$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
On en déduit que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. D'après la question précédente, la somme est convergente ssi $\alpha > 2$, d'après la comparaison avec une série de Riemann.
3. La double somme étant à termes positifs, la famille est sommable. Elle est indexée par
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,k), k \geq n+1\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{(n,k),\ 0 \leq n \leq k-1\},$$
les unions étant disjointes. 0n peut intervertir les deux sommes (Fubini)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(k \times \frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 8.
Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On note $D_{n,k}$ le nombre de permutations sur $\{1,\dots,n\}$ avec k points fixes.
On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$.
d_n est le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Montrer que la proportion de permutations sans point fixes de S_n converge vers un nombre réel l, que l'on déterminera.

---

1. Puisque $\{1,2,3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   — l'identité ;
   — les 3 transpositions (1 2), (1 3), (2 3).
   — les 2 cycles (1 2 3) et (1 3 2).

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
$$D_{3,0} = 1,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant k point fixes, alors la famille $A_0,\dots,A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   — $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   — ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z| < 1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x| < 1$. De plus, on a
$$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{n!}.$$
Mais
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = 1.$$
On obtient
$$(\exp x) f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x)f(x) = \frac{1}{1-x}$, on tire
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$
On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
Par identification, on obtient bien $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. La proportion cherchée est $p_n = d_n/n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On veut calculer la limite de cette quantité.
En utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1) = 1/e$.

Exercice 9.
Soit Ω l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que Ω est dénombrable.
On pourra utiliser le fait que la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis est dénombrable.

Une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables ou finis est encore au plus dénombrable.

Les éléments de Ω sont des parties de $\mathbb{N}$.

On pose $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$, l'ensemble des éléments de Ω qui sont inclus dans $\{0, \dots, n\}$.

Pour A une partie finie de $\mathbb{N}$, il existe toujours un entier $n \geq 0$ tel que $A \subset \{0, \dots, n\}$. On a donc $\Omega = \cup_{n \geq 0} \Omega_n$.

L'ensemble Ω_n est inclus dans $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$, ensemble fini de cardinal 2^{n+1}.

Ainsi, Ω est égal à la réunion dénombrable d'ensembles finis (ou dénombrables). Donc Ω est dénombrable.