Feuille de TD n^o 1

Dénombrement - Sommabilité

7 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 2. Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 1}$ est sommable.
2. Montrer que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   Que vaut sa somme $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{n(k+1)}$?
3. On pose $A_p = \{(n, k) \in \mathbb{N}^* \times N \text{ tq } n(k + 1) = p\}$, pour $p \geq 1$.
   Vérifier que la famille $(A_p)_p$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
4. On pose $d(p)$ le nombre de diviseurs de p.
   Calculer $Card(A_p)$.
5. Montrer que l'on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

Exercice 4.

1. Vérifier que la famille des $A_k = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } n + p = k\}$, $k \geq 0$, forme une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On regarde la famille $\left(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} = (a_{n,p})$.
   Calculer $\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p}$.
3. En déduire tous les nombres réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Indiquer quel résultat du cours est nécessaire ici.
   Donner la valeur de la somme de la famille.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
2. Quel est l'ensemble $\bar{A}$?
3. Calculer $Card(\bar{A})$.
4. Calculer $Card(A)$.

Exercice 6.
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\sum_{n\geq 0} u_n^2 < +\infty$.

1. Montrer que pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $\sum_{n\geq 0} u_{\tau(n)}^2 = \sum_{n\geq 0} u_n^2$. On pourra utiliser les résultats de cours sur la sommabilité.
2. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$, $\forall n \geq 0$. Montrer que la famille $(v_n^2)_{n\geq 0}$ est sommable. Que vaut $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2$?
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} |u_n v_n|$?

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 7.
Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On note $D_{n,k}$ le nombre de permutations sur $\{1, \ldots, n\}$ avec k points fixes.
On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$.
d_n est le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.
7. Montrer que la proportion de permutations sans point fixes de S_n converge vers un nombre réel l, que l'on déterminera.

Exercice 8.
Soit Ω l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que Ω est dénombrable.
On pourra utiliser le fait que la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis est dénombrable.