Feuille de TD n° 10

Variables aléatoires

18 mai 2022

Exercice 1. Soit $p \in]0,1[$. Une personne fait 12 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité p de faire Pile.
Une deuxième personne fait 36 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité $\frac{p}{3}$ de faire Pile. On note X la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la première personne, et Y la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la deuxième personne.
• Décrire les v.a. X, Y (image, loi de probas, espérance, variance)
• On se demande si l'on a plus souvent $X > Y$ ou $Y < X$. Quelle(s) quantité(s) faut-il calculer pour le savoir ?

• X est une v.a. binomiale de paramètres 12 et p. Son image est donc $\{0,\dots,12\}$. On a $\mathbb{P}(X=k) = \binom{12}{k}p^k(1-p)^{12-k}$ pour $0 \le k \le 12$, et $\mathbb{E}(X) = 12p$. On a $Var(X) = 12p(1-p)$.
Y est une v.a. binomiale de paramètres 36 et $\frac{p}{3}$. Son image est donc $\{0,\dots,36\}$. On a $\mathbb{P}(X=k) = \binom{36}{k}\frac{p}{3}^k(1-\frac{p}{3})^{36-k}$ pour $0 \le k \le 36$, et $\mathbb{E}(X) = 36\frac{p}{3} = 12p$. On a $Var(Y) = 36\frac{p}{3}(1-\frac{p}{3}) = 12p(1-\frac{p}{3})$.
Les v.a. X et Y ont la même espérance.
• Il faut calculer $\mathbb{P}(X > Y)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{12}\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k, Y=m) = \sum_{k=1}^{12}\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=m)$.
Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{12}\mathbb{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=0}^{12}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$.
Il n'est pas facile de simplifier ces sommes à la main. C'est dans ces moments qu'il est intéressant de demander de l'aide à l'ordinateur pour terminer les calculs (et avoir une valeur approchée).

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi géométrique de paramètres respectifs $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

La probabilité que A soit inversible est égal à la probabilité que le déterminent $X^2 - Y^2$ de A soit non nul. Or X et Y sont tous les deux positifs. Donc $X^2 - Y^2 = 0$ si, et seulement si, $X = Y$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X^2 - Y^2 \neq 0) &= 1 - P(X^2 - Y^2 = 0) \\ &= 1 - P(X = Y) \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k, Y=k)\right) \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_1p_2((1-p_1)(1-p_2))^{k-1}\right) \\ &= 1 - \frac{p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2} \end{aligned}$$

Exercice 3. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard uniforme une boîte, puis une boule dans la boîte.
Soient X, Y les v.a. associées au numéro de la boîte et au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi de probas de la v.a. (X, Y).
2. Déterminer la loi de probas de Y, et donner son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

---

1. Remarquons d'abord que (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n\}^2$. En outre :

$$P\big((X=i) \cap (Y=j)\big) = P(X=i)P(Y=j|X=i).$$

On a donc :

$$P\big((X=i) \cap (Y=j)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

2. Y est une loi marginale du couple (X, Y). On a donc :
$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{n} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big).$$
On en déduit :
$$P(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}.$$
Le calcul de l'espérance donne :
$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} jP(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}.$$
On permute les sommes. En cas de difficultés, il est conseillé de représenter les sommes sous forme d'un tableau (triangulaire). On obtient :
$$\begin{aligned}E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)\\ &= \frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$
3. Il est facile de vérifier que $P(Y=2)\neq 0$, et bien sûr on a $P(X=1)=\frac{1}{n}\neq 0$. On en déduit que
$$P(X=1)P(Y=2)\neq 0.$$
Or, on a prouvé que $P\big((X=1),(Y=2)\big)=0$. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
4. L'événement $(X=Y)$ est réalisé si, et seulement si, X et Y prennent les mêmes valeurs. On a donc :
$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{n}P\big((X=i),(Y=i)\big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Exercice 4.
• Calculer la fonction génératrice d'une v.a. X dont la loi de probas est la loi uniforme sur $\{1,\ldots,12\}$.
• On prend deuxs dé à 6 faces, que l'on truque. On lance ces dés, de façon indépendante.
Soient X_1, X_2 les v.a. associées au résultats de chaque dé.
Ecrire la fonction génératrice de X_1+X_2 en fonction des lois de probas $(p_1,\ldots,p_6)$ et $(q_1,\ldots,q_6)$ de X_1 et de X_2.
• Peut-on truquer deux dés à 6 faces de sort que la somme des faces obtenues en lançant les dés ait une loi de probas uniforme ?

• Pour S une v.a. de loi de probas uniforme que $\{1,\ldots,12\}$, on a
$$G_S(s)=\sum_{k=2}^{12}\frac{1}{11}s^k=\frac{s^2}{11}\frac{1-s^{11}}{1-s}\ (s\neq 1),$$
et $G_S(1)=1$.
• Les jets des dés sont indépendants, donc X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, $G_{X_1+X_2}=G_{X_1}G_{X_2}$.
On a $G_{X_1}(s)=s(p_1+p_2s+\ldots+p_6s^5)=sP(s)$, et $G_{X_1}(s)=s(q_1+q_2s+\ldots+q_6s^5)=sQ(s)$, où P et Q sont des polynômes de degré 5 (à coefficients réels positifs, dont la somme vaut 1).
• Si c'était le cas, on aurait $G_S=G_{X_1+X_2}$.
Pour $s\in[0,1[$, c'est équivalent à $\dfrac{s^2}{11}\dfrac{1-s^{11}}{1-s}=s^2P(s)Q(s)$, ssi $1-s^{11}=11(1-s)P(s)Q(s)$, ssi $1-X^{11}=11(1-X)P(X)Q(X)$.
Cela est impossible car $1-X^{11}$ a une seule racine réelle qui est 1 et qui est simple, tandis que $11(1-X)P(X)Q(X)$ a plusieurs racines réelles (ou une double) car P et Q sont de degré 5 (degré impair).

Exercice 5. Soit $p\in]0,1[$. On fait un Pile ou Face avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce de façon indépendante, jusqu'à obtenir Pile une deuxième fois.
On note X la v.a. qui donne le nombre de Face obtenus pendant les lancers.

1. Déterminer la loi de probas de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. On procède à l'expérience suivante :
Si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules dans une urne, numérotées de 0 à n.
Puis, on tire au hasard uniforme une boule de cette urne. On pose Y la v.a. associée au numéro obtenu.
Calculer $\mathbb{P}(Y=k)$, pour $k\in\mathbb{N}$.
Calculer l'espérance de Y.

4. On pose $Z = X - Y$.
Donner la loi de probas de Z et vérifier que es v.a. Z et Y sont indépendantes.

---

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un face. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :
$$\mathbb{P}(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$
2. La série définisant $\mathbb{E}(X)$ est convergente. On trouve :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \frac{2(1-p)}{p}.$$
3. Si $n \geq 1$ est fixé, et $k \in \{0, \dots, n\}$, on a clairement :
$$\mathbb{P}(Y = k|X = n) = \frac{1}{n+1}.$$
Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k|X = n)\mathbb{P}(X = n)\\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)p^2(1-p)^n \frac{1}{n+1} = p(1-p)^k.\end{aligned}$$
On reconnait que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$
Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.
4. On a :
$$(Z = h) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \left[(Y = j) \cap (X = h+j)\right].$$
Cette réunion étant disjointe, il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = h) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = j|X = h+j)\mathbb{P}(X = h+j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j}\\ &= p(1-p)^h.\end{aligned}$$
On a ensuite :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}[(Z = h), (Y = j)] &= \mathbb{P}(X = h+j, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j|X = h+j)\mathbb{P}(X = h+j)\\ &= p^2(1-p)^{h+j}.\end{aligned}$$
Ceci est égal à $\mathbb{P}(Z = h)\mathbb{P}(Y = j)$. Les variables aléatoires sont indépendantes.