FEUILLE DE TD N° 11

Variables aléatoires

27 AVRIL 2022

Exercice 1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on place une puce en $(0,0)$.
La puce se déplace en sautant. Chaque saut est de longueur 1, dans l'une des 4 directions (haut, bas, gauche, droite), de façon uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose M_n la v.a. qui donne la position de la puce après n sauts. On pose X_n, Y_n les v.a. coordonnées du point M_n.
On a donc $M_0 = (0,0)$ (fonction constante égale à $(0,0)$).
Toutes les v.a. sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
   On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, ... , T_n sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de probas de T_n.
   Calculer $\mathbb{E}(T_n)$, et la variance de T_n.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2,... , T_n.
   (c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.
   (a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.
   (a) Si n est impair, que vaut p_n ?
   (b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.
   Etablir la relation :
$$p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$$
   On pourra utiliser la relation : $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.
4. Que dire de la série $\sum p_n$? Que peut-on en conclure ? On ne demande pas de preuve !

---

1. (a) On pose $U_n : \Omega \to \{H, B, G, D\}$ la v.a. associée à la direction du saut numéro n (haut, bas, gauche, droite). Alors U_n est une v.a. de loi de probas uniforme, et les U_k sont indépendantes.
   On a $\mathbb{P}(T_n = 0) = \mathbb{P}(U_n = \{H, B\}) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = D) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(U_n = G) = \frac{1}{4}$. D'où $\mathbb{E}(T_n) = 0$. Et $Var(T_n) = \frac{1}{2}$.
   (b) On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$
   (c) Par linéarité de l'espèrance on a $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(T_n) = 0$.
   Par indépendance, les variances s'ajoutent : $Var(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} Var(T_k) + Var(0) = \frac{n}{2}$.
2. (a) Non car si $X_n = 1$, alors $Y_n = 0$.
   (b) $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leq \mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2 + Y_n^2) = n^2$.
3. (a) $X_n + Y_n$ est de même parité que n, donc $p_n = 0$.
   (b) Soit $0 \leq k \leq m$.
   On suppose qu'on fait k sauts à droite et donc k sauts à gauche, $m-k$ sauts en haut et $m-k$ sauts en bas, il faut les choisir parmi $2m$:
$$\binom{n}{k \quad n-k \quad k \quad n-k} = \frac{(2m)!}{(k!)^2(m-k)!^2} = \binom{2m}{m}\left[\binom{m}{k}\right]^2$$
   Comme chaque mouvement à une probabilité de $\frac{1}{4}$, on obtient le résultat demandé en sommant sur tous les k entre 0 et m.
4. La formule de Stirling nous dit que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et donc
$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m\left(\frac{m}{e}\right)^n} = 2^{2m}$$
   On en déduit que $p_n \sim \frac{1}{\pi n}$. La série est divergente, cela signifie que la puce repasse presque sûrement par l'origine !
   Si on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k, Y_k)$, alors on va montrer que $\mathbb{P}(\limsup(S_n = O)) = 1$ où $O = (0,0)$ est l'origine. Ce qui singifie que la puce repasse presque sûrement une infinité de fois par O !
   Notons $A = \limsup(S_n = 0)$. Dire que $\mathbb{P}(A) = 1$ équivaut à dire que $\mathbb{P}(B) = 0$ avec

$B = A^c.B$ est l'événement : la suite ne passe qu'un nombre fini de fois en 0. On peut partitionner cet événement en fonction de l'instant de dernier passage :

$$\begin{aligned}
B &= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k \neq 0\} \\
&= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k - S_n \neq 0\} \\
&= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, S_n + i - S_n \neq 0\} \\
&= \cup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\}
\end{aligned}$$

Comme c'est une partition, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cap \{\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq O\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = 0\right) \mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right)
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $S_n = (X_1, Y_1) + \cdots + (X_n, Y_n)$ ne dépendant que des n premières variables, S_n est indépendante de $(X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i})$.
Mais, la probabilité $\mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_{n+1}, Y_{n+1}) + (X_{n+2}, Y_{n+2}) + \cdots + (X_{n+i}, Y_{n+i}) \neq 0\right)$ ne dépend pas de n car les suites $((X_n, Y_n))_{n>0}$ et $((X_n, Y_n))_{n>i}$ sont toutes deux des variables aléatoires indépendantes de même loi. Notons α cette probabilité, $\alpha = \mathbb{P}\left(\forall i > 0, (X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) + \cdots + (X_i, Y_i) \neq 0\right)$ Nous avons donc d'une part que la série de terme général $\alpha\mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$ converge (puisque c'est une série à termes positifs dont la limite vaut $\mathbb{P}(B)$). Mais par hypothèse, la série de terme général $\mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$ diverge. Nécessairement, α vaut zéro. Donc $\mathbb{P}(B) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète et positive.

1. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$

   On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

2. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$

   On pourra utiliser la première question.

---

1. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$n\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1} \leq (n+1)\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}.$$

   L'espérance est croissante

$$n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{n\leq X<n+1}) \leq (n+1)\mathbb{P}(n \leq X < n+1).$$

   et en sommant on obtient dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1)$$

   ce qui montre que la somme de gauche est finie ssi l'espérance l'est.

2. Pour tout $n, k \geq 0$, on pose $a_{k,n} = \mathbb{P}(n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}$ où $\mathbb{1}_{k<n}$ vaut 1 si $k < n$ et 0 sinon. En commençant à sommer sur k

$$\sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}((n \leq X < n+1)$$

   et en commençant à sommer sur n

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\mathbb{1}_{k<n}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n>k}\mathbb{P}((n \leq X < n+1)\right) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X \geq k+1)$$

   Comme les sommes sont à termes positifs l'une est finie ssi l'autre l'est. Avec la question 1, on obtient l'équivalence.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes. On suppose que les $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de même loi de probas et sont indépendantes entre elles.

1. Montrer que $\dfrac{X_n}{n}$ converge vers 0 en probabilité, c-à-d

$$\forall \varepsilon, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors $\mathbb{E}\left(\left|\dfrac{X_n}{n}\right|\right)$ converge vers 0. Étudier la réciproque.

3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 1$.

   Indication : Utiliser l'exercice précédent et le lemme de Borel-Cantelli.

---

1. Les X_n ayant même loi, on a
$$\mathbb{P}(\frac{|X_n|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\frac{|X_1|}{n} \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\big(|X_1| \geq n\varepsilon\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
2. Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$), alors
$$\mathbb{E}\left(\frac{|X_n|}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_1|}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(|X_n|\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
La réciproque est claire car la suite existe ssi $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$.
3. On suppose $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. L'exercice précédent montre la série
$$\mathbb{P}(\frac{X_1}{\varepsilon} \geq n)$$
converge et donc la série de terme générale $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\varepsilon} \geq n)$ converge et celle de terme générale $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\varepsilon} < n)$ diverge.
Rappelons le lemme de Borel-Cantelli
Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.
   (a) Si la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$
   (b) Si de plus la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est indépendante, alors
$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| < n\varepsilon\}) = 1$$
car les variables sont indépendantes.
On pose $A_k = \limsup\{|X_n| < \frac{n}{k}\}$ qui est une suite décroissante et donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(A_k) = 1$$
Mais $\bigcap_{k\geq 1} A_k = \{\lim \frac{|X_n|}{n} = 0\}$, d'où le résultat.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes réelles, et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète.
Montrer que si $(Y_n)_n$ convergence presque-sûrement vers Y, alors $(Y_n)_n$ convergence en probabilités vers Y.

Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence presque sûre de Y_n vers Y signifie que l'événement
$$\Omega' := \left\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}$$
a pour probabilité 1. Définissons
$$\Omega'_\varepsilon := \{\omega \in \Omega; \exists k_0 = k_0(\omega), \forall n \geq k_0, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\}$$
C'est bien un évènement (i.e. $\Omega'_c \in \mathcal{F}$) puisqu'il s'écrit
$$\Omega'_\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\geq k}\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$
De plus Ω'_ε contient Ω', donc $\mathbf{P}\left(\Omega'_c\right) = 1$. Pour tout $k \geq 1$, notons
$$A_k := \{\omega \in \Omega; \forall n \geq k, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n\geq k}\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$$
La suite $(A_k)_{k\geq 1}$ est clairement croissante pour l'inclusion et sa réunion est Ω'_ε. Par continuité séquentielle croissante de $\mathbf{P}$, on a donc $\mathbf{P}\left(A_k\right) \uparrow \mathbf{P}\left(\Omega'_\varepsilon\right) = 1 (k \to +\infty)$. Par conséquent,
$$\forall \delta > 0, \exists k_1, \quad P\left(A_{k_1}\right) > 1 - \delta$$
Pour tout $n \geq k_1$, l'évènement $\{|Y_n - Y| < \varepsilon\}$ contient A_{k_1}, d'où
$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$
et en passant à l'évènement complémentaire
$$\forall n \geq k_1, \quad \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right) < \delta$$
Ceci établit la convergence vers 0 de $\mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right)$. Comme ε était quelconque, on a bien convergence en probabilité de Y_n vers Y