Feuille de TD n° 11

Variables aléatoires

27 avril 2022

Exercice 1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on place une puce en $(0,0)$.
La puce se déplace en sautant. Chaque saut est de longueur 1, dans l'une des 4 directions (haut, bas, gauche, droite), de façon uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose M_n la v.a. qui donne la position de la puce après n sauts. On pose X_n, Y_n les v.a. coordonnées du point M_n.
On a donc $M_0 = (0,0)$ (fonction constante égale à $(0,0)$).
Toutes les v.a. sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
   On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, ... , T_n sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de probas de T_n.
   Calculer $\mathbb{E}(T_n)$, et la variance de T_n.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2,... , T_n.
   (c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.
   (a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.
   (a) Si n est impair, que vaut p_n ?
   (b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).
   Etablir la relation :
   $$p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$$
   On pourra utiliser la relation : $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.
4. Que dire de la série $\sum p_n$? Que peut-on en conclure ? On ne demande pas de preuve !

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète et positive.

1. Montrer que
   $$\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$
   On pourra utiliser des fonctions indicatrices.
2. Montrer que
   $$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$
   On pourra utiliser la première question.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes. On suppose que les $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de même loi de probas et sont indépendantes entre elles.

1. Montrer que $\dfrac{X_n}{n}$ converge vers 0 en probabilité, c-à-d
   $$\forall \varepsilon, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$
2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$), alors $\mathbb{E}\left(\left|\dfrac{X_n}{n}\right|\right)$ converge vers 0. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n} = 0\right) = 1$.
   Indication : Utiliser l'exercice précédent et le lemme de Borel-Cantelli.