Feuille de TD n° 12

Résultats limites, Chaînes de Markov

2 juin 2022

Exercice 1.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de probas, et de carré intégrable.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Montrer que $\forall\, a \in]0, +\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   (a) On prend une urne avec 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire, sans remise, une boule dans cette urne, de façon aléatoire uniforme et indépendante.
   Pour $n \geq 1$, on pose Y_n la v.a. qui donne la couleur de la boule obtenue au tirage numéro n. (rouge=1, noire=0)
   Donner la loi de la v.a. Y_n.
   Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
   (b) Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$.

1. On pose $X = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.
   Montrer que $Var(X) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'on a
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) \to_{n\to+\infty} 1$$

Exercice 3 (Une chaîne de Markov homogène infinie, irréductible)**.**
Une mouche se déplace dans $\mathbb{Z}^3$.
Pour tout instant $n \geq 0$, on note S_n la v.a. discrète qui donne sa position.
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ et $(Z_n)_{n\geq 0}$ des suites de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, telles que :
$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2, \mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/2,\ \forall n \geq 0$.
On pose $R_n = (X_n, Y_n, Z_n)$.
On suppose que $S_{n+1} = S_n + (X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = S_n + R_{n+1}$ et que $S_0 = (0,0,0)$.
On remarquera que $\tilde{X}_n = \dfrac{X_n+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. De même pour $\tilde{Y}_n$ et $\tilde{Z}_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et qu'elle est homogène.
   On pourra exprimer S_n en fonction des R_i.
2. Soit $n \geq 0$.
   Que vaut $\mathbb{P}(S_n = (0,0,0))$ quand n est impair ?
3. Soit $p \geq 0$.
   Montrer que $\mathbb{P}(S_{2p} = (0,0,0)) = \left(\binom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}\right)^3$.
4. En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent, quand $p \to +\infty$, de $\mathbb{P}(S_{2p} = (0,0,0))$.
5. On note B l'événement "la mouche passe une infinité de fois par $(0,0,0)$".
   Montrer, en utilisant les propriétés des mesures de probabilité, que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Remarque : La suite $(S_n)_n$ est une marche aléatoire dans $\mathbb{R}^3$.
Dans $\mathbb{R}^2$ (voir TD 11, Ex 1), on obtient que la probabilité de revenir une infinité de fois en $(0,0)$ est 1. Dans $\mathbb{R}^3$, revenir une infinité de fois en $(0,0,0)$ est de probabilité 0. Ce résultat est très important chez les marches aléatoires.

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 4. Soit $n \geq 2$. n personnes jouent au jeu suivant :
Chacun mise 1 euro, et écrit Pile ou Face sur du papier sans le montrer aux autres. Puis, un responsable lance une pièce équilibrée.
Si c'est Pile, tous ceux qui ont écrit Pile gagnent. Si c'est Face, tous ceux qui ont écrit Face gagnent.
Les gagnants se partagent les n euros (sous forme de fraction).
Si personne ne gagne, le responsable prend les n euros.

1. Soit $k \in \{1, ..., n\}$.
   On note X_k la v.a. qui indique la somme que reçoit le joueur numéro k à la fin du jeu.
   Calculer l'espérance de X_k.
2. Dans cette question, on suppose qu'une $n+1$-ème personne arrive avant qu'on ne lance la pièce.
   On demande au joueur numéro n s'il accepte que cette personne participe aussi.
   Le joueur n veut maximiser l'espérance de ses gains. Doit-il accepter le nouveau joueur ?
   Le responsable veut lui aussi maximiser l'espérance de ses gains. Doit-il accepter le nouveau joueur ?
3. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On rappelle qu'elle vérifie
   $$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
   Quel raisonnement faut-il utiliser pour montrer le résultat suivant ?
   $\forall x_1, ..., x_n \in I$, $\forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :
   $$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$
   (b) Soit X une v.a. discrète telle que $X(\Omega)$ est fini et inclus dans I.
   Montrer que $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$.
4. On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.
   (a) Vérifier que $\mathbb{E}(X_k^2) = \dfrac{n^2}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \dfrac{1}{(1+r)^2} \binom{n-1}{r} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   (b) En déduire que
   $$\mathbb{E}(X_k^2) \geq \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$
   On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.