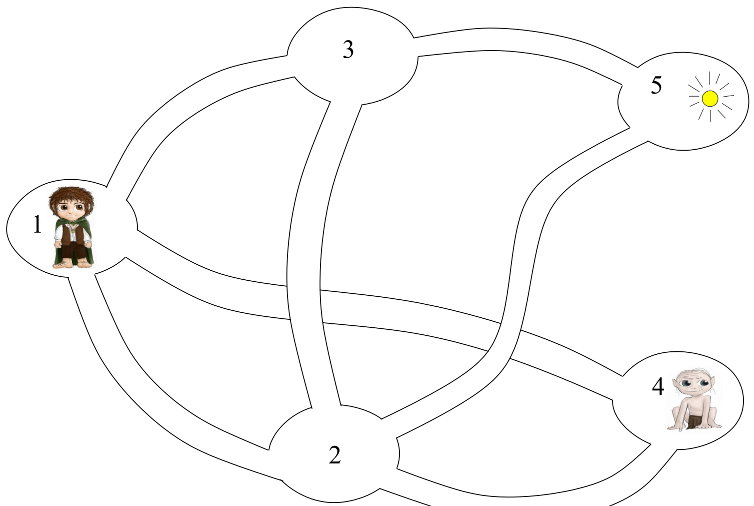
FEUILLE DE TD N° 13

Chaînes de Markov

25 mai 2022

Exercice 1. Bilbo le Hobbit est dans la grotte de Gollum. Il ne peut rien voir, et se déplace au hasard uniforme. Quelle est la probabilité qu'il trouve la sortie (il s'échappe) ou sur le Gollum (capturé) ?



1. Décrire le trajet de Bilbo par une chaîne de Markov $(X_n)_n$.
La chaîne de Markov est-elle finie, homogène, régulièré, irréductible, absorbante ?
Donner sa distribution initiale μ, sa matrice de transition P.
Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov.
Calculer sa matrice fondamentale F.
2. Soit A l'événement "Bilbo s'échappe en 7 déplacements ou moins". Exprimer B en utilisant les X_n, puis exprimer $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de P et de μ.
On ne demande pas de calculer la valeur de $\mathbb{P}(B)$.
3. Quelle est la probabilité p que Bilbo prenne le chemin 1 - 2 - 3 - 2 - 1 - 4 - 4 - 4 ?
4. On note B l'événement "Bilbo finit par trouver la sortie ou Gollum". Exprimer B à l'aide des X_n et de $S = \{4, 5\}$.
Quelle est la probabilité que Bilbo trouve la sortie ou Gollum ?
5. Quelle est la probabilité que Bilbo trouve la sortie, au lieu de Gollum ?
6. En moyenne, combien de salles Bilbo traverse-t-il avant de trouver la sortie ou Gollum ?

---

1. Le trajet de Bilbo se modélise par une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (donc finie), où la probabilité de passer d'un endroit i à un endroit j dépend uniquement de i et de j.
C'est donc une chaîne de Markov homogène.
Sa matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Sa distribution initiale est $\mu = (1, 0, 0, 0, 0)$.
La chaîne de Markov $(X_n)_n$ a deux états absorbants. Et, en partant de n'importe quel état on peut atteindre un état absorbant en deux étapes. La chaîne de Markov est donc absorbante.
On calcule alors sa matrice fondamentale : par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

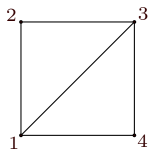
$$F = [I - Q]^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 33 & 16 & 15 \\ 12 & 32 & 12 \\ 15 & 16 & 33 \end{pmatrix}$$

Enfin, comme cela servira, on calcule

$$B = FR = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 33 & 16 & 15 \\ 12 & 32 & 12 \\ 15 & 16 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. On a $B = \bigcup_{i=0}^{7} (X_i = 5)$.
Comme 5 est un état absorbant, pour un $\omega \in \Omega$ tel que $X_0(\omega) = 5$ ou $X_1(\omega) = 5$ ou $\dots$ ou $X_6(\omega) = 5$, alors on a $X_7(\omega) = 5$.
Ainsi, on a aussi $B = (X_7 = 5) = \{\omega \in \Omega,\ \text{t.q. } X_7(\omega) = 5\}$.
D'après le cours, on a donc $\mathbb{P}(B) = (\mu.P^7)_5$.
Pour $P^7 = (a_{i,j})_{i,j}$, cela donne aussi $\mathbb{P}(B) = 1.a_{1,5} + 0 = a_{1,5}$.
Pour calculer $\mathbb{P}(B)$, il faut calculer P^7. On utilise alors l'ordinateur pour faire les calculs.
3. La probabilité vaut : $p = 1/3.1/4.1/3.1/4.1/3.1.1 = \frac{1}{16.27} = \frac{1}{432}$.
4. On a $B = \bigcup_{n \geq 0} (X_n \in S)$. On peut aussi écrire $B = \{\omega \in \Omega,\ \text{t.q. } \exists n \geq 0, \text{ avec } X_n(\omega) \in S\}$.
D'après les résultats sur les C.M. absorbantes, on a $P(B) = 1$.
5. On pose τ_5 la v.a. telle que $\tau_5(\omega) = \inf\{n,\ \text{t.q. } X_n(\omega) = 5\}$. C'est la v.a. qui indique le temps de la première arrivée en 5.
D'après les résultats du cours, $\mathbb{P}\{X_{\tau_5} = 5\}$ se calcule avec les coefficients de μ et de B.
On a $\mathbb{P}\{X_{\tau_5} = 5\} = 1.b_{1,2} + 0 = \dfrac{1}{24}(4+5) = \dfrac{3}{8}$.
6. On pose τ la v.a. telle que $\tau(\omega) = \inf\{n,\ \text{t.q. } X_n(\omega) \in \{4,5\}\}$. C'est la v.a. qui indique le temps de la première arrivée en $\{4,5\}$.
D'après les résultats du cours, $\mathbb{E}(\tau)$ se calcule avec les coefficients de μ et de F.
On a $\mathbb{E}(\tau) = 1.(f_{1,1} + f_{1,2} + f_{1,3}) + 0 = \dfrac{1}{24}(33 + 16 + 15) = \dfrac{8}{3}$

Exercice 2. Une fourmi se déplace sur les arêtes du graphe dessous.
Pour chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la v.a. qui donne sa position sur l'un des 4 sommets (1,2,3 ou 4).
Entre l'instant n et $n+1$ elle choisit au hasard uniforme une arête qui part du sommet X_n pour aller vers un autre sommet.



1. La chaîne de Markov associée est-elle homogène ?
Si oui, donner sa matrice de transition Q.
2. On suppose qu'à l'instant $n = 0$ la fourmi est sur le sommet 4.
Quelle est la probabilité pour qu'elle soit sur le sommet 4 à l'instant 3 ?
3. La chaîne de Markov est-elle régulière, irréductible, absorbante ?
4. Rappeler la définition d'une distribution stationnaire pour Q.
Puis, calculer la distribution stationnaire π de la chaîne de Markov.

---

1. La chaîne de Markov est bien homogène : $\mathbb{P}(X_{n+1} = a \mid X_n = b)$ ne dépend que de a et de b (le sommet où est la fourmi, et le sommet où elle se rendra).
Sa matrice de transition est
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Soit $\pi_n = \big(P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n) = 3, P(X_n) = 4\big)$ la loi de probabilité à chaque instant $n \in \mathbb{N}$. On sait que la fourmi est sur le sommet 4 à l'instant 0, d'où $\pi_0 = (0,0,0,1)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n = \pi_0 \cdot Q^n$.
2. Soit μ la distribution initiale de la chaîne de Markov. Dans cette question, on a $\mu = (0,0,0,1)$.
En posant $\pi_n = \big(P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n) = 3, P(X_n) = 4\big)$ la loi de probas de X_n, le cours donne $\pi_n = \mu \cdot Q^n$, $\forall n \geq 1$.
Ainsi, on a $\pi_3 = \mu \cdot Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot Q^3$.
D'où $P(X_3 = 4) = (Q^3)_{4,4}$. On calcule :
$$\begin{aligned} Q^3 &= Q^2 \cdot Q \\ &= \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/3 & 1/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & 1/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Donc la probabilité pour que la fourmi soit sur le sommet 4 à l'intant 3 est égale à $P(X_3 = 4) = 1/9$.
3. La matrice Q^2 montre que la chaîne est irréductible.
4. Une distribution initiale μ est stationnaire pour Q si $\mu Q = \mu$.
On doit dont résoudre $\pi = \pi Q$, pour π une loi de probas ($\pi_j \in [0,1]$ et $\sum_j \pi_j = 1$).
Cela est est équivalent à résoudre $Q^t \pi^t = \pi^t$.
On calcule alors le noyau de $Q^t - I_4$.
La résolution du système donne : $\ker(Q^t - I_4) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
On en déduit donc que $\pi = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $N \geq 1$. On prend N boules numétées de 1 à N, et deux boîtes A et B.
A l'instant $n = 0$, les boules sont réparties selon une distribution initiale π_0.
Entre l'instant n et $n+1$, on choisit au hasard uniforme un numéro $k \in [\![1, N]\!]$:

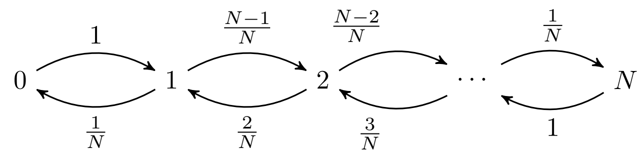
— si la boule est dans la boîte A, on la met dans la boîte B ;

— si la boule est dans la boîte B, on la met dans la boîte A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose X_n la v.a. qui donne le nombre de boules dans la boîte A à l'instant n.

1. La chaîne de Markov $(X_n)_n$ est-elle finie ? Est-elle homogène ?
   Si oui, déterminer la probabilité de transition Q_{ij} de chaque état $i \in [\![0, N]\!]$ vers chaque état $j \in [\![0, N]\!]$.
   Écrire la matrice de transition Q.
2. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov. Cette chaîne est-elle absorbante, irréductible ?
3. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{j \in [\![0,N]\!]} jQ_{ij} = a \cdot i + b$, pour tout $0 \leq i \leq N$.
   Calculer a et b, et montrer que $0 \leq a < 1$.
4. Soit $i \in [\![0, N]\!]$. On suppose que $X_0 = i$.
   (a) Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$E(X_n) = a^n \cdot i + b\,\frac{1 - a^n}{1 - a}.$$
   On pourra utiliser la question précédente et une récurrence.
   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty} E(X_n)$ en fonction de N.
5. Montrer que la loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ est une loi de probabilité stationnaire, et que c'est l'unique loi de probas stationnaire.

Cette chaîne de Markov est un modèle de la diffusion des N molécules d'un gaz entre deux récipients A et B, proposé en 1907 par les physicien(ne)s Paul & Tatiana Ehrenfest.



1. C'est une chaîne de Markov finie car X_n est à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$.
   Elle est homogène car $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n.
   La probabilité de transition Q_{ij} est nulle si $j \notin \{i-1, i+1\}$.
   Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $Q_{i,i+1} = P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i)$ est la probabilité que la boule choisie soit dans la boîte B, sachant que la boîte B contient $N - i$ boules. D'où $Q_{i,i+1} = \dfrac{N-i}{N}$. De même, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $Q_{i,i-1} = \frac{i}{N}$. La matrice de transition Q est donc
   $$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. D'après le graphe, il existe un chemin de tout état i vers tout état j, d'où la chaîne est irréductible.
3. Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$. On a
   $$\begin{aligned} \sum_{j \in [\![0,N]\!]} jQ_{ij} &= (i-1) \cdot \frac{i}{N} + (i+1) \cdot \frac{N-i}{N} \\ &= a \cdot i + b, \end{aligned}$$
   avec $a = 1 - \dfrac{2}{N}$ (d'où $0 \leq a < 1$) et $b = 1$.
   De plus, cette formule est aussi juste pour $i = 0$ ou N.
4. Soit $i \in [\![0, N]\!]$. On suppose que $(X_0 = i)$.
   (a) Par définition de l'espérance, on a $E(X_n) = \sum_j jP(X_n = j)$.
   Or $P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j | X_{n-1} = i)P(X_{n-1} = i) = \sum_i Q_{ij}P(X_{n-1} = i)$.

D'où

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i,j} jQ_{ij}P(X_{n-1}=i) \\ &= \sum_i (a\cdot i+b)P(X_{n-1}=i) \\ &= a\cdot E(X_{n-1})+b. \end{aligned}$$

D'où, par récurrence : $E(X_n)=a^nE(X_0)+b\cdot(1+a+\cdots+a^{n-1})$. Or $E(X_0)=i$. Donc

$$E(X_n)=a^n\cdot i+b\,\frac{1-a^n}{1-a}.$$

(b) $E(X_n)=a^n\cdot i+b\,\dfrac{1-a^n}{1-a}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{N}{2}$.

5. Si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$, alors $P(X_n=i)=\dbinom{N}{i}\dfrac{1}{2^N}$.

D'où pour tout $j\in[\![1,N-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=j) &= \sum_i P(X_n=i)\cdot Q_{ij} \\ &= P(X_n=j-1)\cdot Q_{j-1,j}+P(X_n=j+1)\cdot Q_{j+1,j} \\ &= \binom{N}{j-1}\tfrac{1}{2^N}\cdot\frac{N-(j-1)}{N}+\binom{N}{j+1}\tfrac{1}{2^N}\cdot\frac{j+1}{N} \\ &= \binom{N-1}{j-1}\tfrac{1}{2^N}+\binom{N-1}{j}\tfrac{1}{2^N} \\ &= \binom{N}{j}\tfrac{1}{2^N}. \end{aligned}$$

De même si $j\in\{0;N\}$.
Ainsi, la loi binomiale $\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$ est une loi de probabilité stationnaire.
Comme la chaîne de Markov est finie et irréductible, elle possède une unique loi de probabilité stationnaire. Cela donne l'unicité.