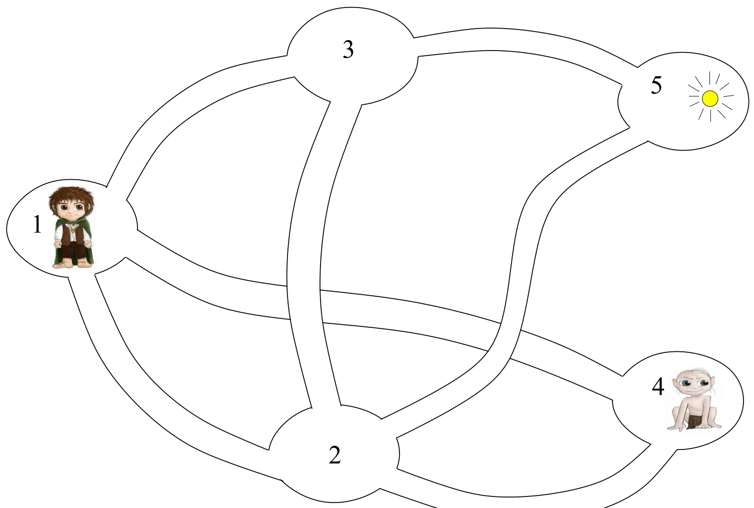
Feuille de TD n° 13

Chaînes de Markov

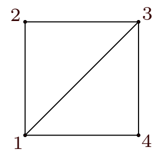
25 mai 2022

Exercice 1. Bilbo le Hobbit est dans la grotte de Gollum. Il ne peut rien voir, et se déplace au hasard uniforme. Quelle est la probabilité qu'il trouve la sortie (il s'échappe) ou sur le Gollum (capturé) ?



1. Décrire le trajet de Bilbo par une chaîne de Markov $(X_n)_n$.
   La chaîne de Markov est-elle finie, homogène, régulièré, irréductible, absorbante ?
   Donner sa distribution initiale μ, sa matrice de transition P.
   Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov.
   Calculer sa matrice fondamentale F.
2. Soit A l'événement "Bilbo s'échappe en 7 déplacements ou moins". Exprimer B en utilisant les X_n, puis exprimer $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de P et de μ.
   On ne demande pas de calculer la valeur de $\mathbb{P}(B)$.
3. Quelle est la probabilité p que Bilbo prenne le chemin 1 - 2 - 3 - 2 - 1 - 4 - 4 - 4 ?
4. On note B l'événement "Bilbo finit par trouver la sortie ou Gollum". Exprimer B à l'aide des X_n et de $S = \{4, 5\}$.
   Quelle est la probabilité que Bilbo trouve la sortie ou Gollum ?
5. Quelle est la probabilité que Bilbo trouve la sortie, au lieu de Gollum ?
6. En moyenne, combien de salles Bilbo traverse-t-il avant de trouver la sortie ou Gollum ?

Exercice 2. Une fourmi se déplace sur les arêtes du graphe dessous.
Pour chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la v.a. qui donne sa position sur l'un des 4 sommets (1,2,3 ou 4).
Entre l'instant n et $n+1$ elle choisit au hasard uniforme une arête qui part du sommet X_n pour aller vers un autre sommet.



1. La chaîne de Markov associée est-elle homogène ?
   Si oui, donner sa matrice de transition Q.
2. On suppose qu'à l'instant $n = 0$ la fourmi est sur le sommet 4.
   Quelle est la probabilité pour qu'elle soit sur le sommet 4 à l'instant 3 ?
3. La chaîne de Markov est-elle régulière, irréductible, absorbante ?
4. Rappeler la définition d'une distribution stationnaire pour Q.
   Puis, calculer la distribution stationnaire π de la chaîne de Markov.

Exercice 3. Soit $N \geq 1$. On prend N boules numétées de 1 à N, et deux boîtes A et B.
A l'instant $n = 0$, les boules sont réparties selon une distribution initiale π_0.
Entre l'instant n et $n+1$, on choisit au hasard uniforme un numéro $k \in [\![1, N]\!]$:

— si la boule est dans la boîte A, on la met dans la boîte B ;

— si la boule est dans la boîte B, on la met dans la boîte A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose X_n la v.a. qui donne le nombre de boules dans la boîte A à l'instant n.

1. La chaîne de Markov $(X_n)_n$ est-elle finie ? Est-elle homogène ?
   Si oui, déterminer la probabilité de transition Q_{ij} de chaque état $i \in [\![0, N]\!]$ vers chaque état $j \in [\![0, N]\!]$.
   Écrire la matrice de transition Q.
2. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov. Cette chaîne est-elle absorbante, irréductible ?
3. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{j \in [\![0,N]\!]} jQ_{ij} = a \cdot i + b$, pour tout $0 \leq i \leq N$.
   Calculer a et b, et montrer que $0 \leq a < 1$.
4. Soit $i \in [\![0, N]\!]$. On suppose que $X_0 = i$.
   (a) Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$E(X_n) = a^n \cdot i + b\,\frac{1 - a^n}{1 - a}.$$
   On pourra utiliser la question précédente et une récurrence.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$ en fonction de N.
5. Montrer que la loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ est une loi de probabilité stationnaire, et que c'est l'unique loi de probas stationnaire.