Feuille de TD n° 14

Chaînes de Markov, Variables aléatoires

25 mai 2022

Exercice 1. Toute matrice stochastique de taille 2×2 s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad \text{avec } p, q \in [0,1]$$

1. Dire, en fonction de p et q, quand P donne une chaîne de Markov absorbante, irréductible, régulière.
2. Montrer que la matrice
$$\Pi = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$
est un projecteur $\left(\Pi^2 = \Pi\right)$ qui commute avec P.
Calculer son noyau $Ker(\Pi)$ et son image $Im(\Pi)$.
3. Soit $Q = P - \Pi$. Montrer que $Q\Pi = \Pi Q = 0$.
Calculer Q^2 en fonction de Q.
4. En déduire une expression de Q^n, pour tout $n \geq 1$.
5. Déduire des résultats précédents une expression de P^n, pour tout $n \geq 1$.
Discuter la limite de P^n lorsque $n \to \infty$ en fonction de p et q.

---

1. Une chaine de Markov homogène de matrice de transition P est
   - absorbante si $p = 0$ ou $q = 0$
   - irréductible non régulière si $p = q = 1$
   - régulière dans les autres cas.
2. Le noyau est engendré par $(p, -q)^T$; l'image par $(1,1)^T$
3. On obtient par calcul explicite
$$Q = \frac{1-(p+q)}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$
puis $Q^2 = [1-(p+q)]Q$ et donc $Q^n = [1-(p+q)]^{n-1}Q$ pour tout $n \geqslant 2$.
4. $P^2 = (Q+\Pi)^2 = Q^2 + \Pi Q + Q\Pi + \Pi^2 = Q^2 + \Pi$, et donc
$$P^n = Q^n + \Pi = \frac{[1-(p+q)]^n}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} + \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$
Par conséquent, si $0 < p+q < 2$ on a $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$.
Si $p = q = 1$, alors $P^n = I$ si n est pair et $P^n = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si n est impair.
Si $p = q = 0$, la matrice Q n'est pas définie, mais $P = I$ donc $P^n = I$ pour tout n.

Exercice 2. Une personne joue à un jeu de Pile ou Face équilibré ($p = 0.5$).
La première fois, elle mise 100 yuan.
Si la personne perd, elle rejoue et mise 200 yuan.
A chaque fois que la personne perd, elle rejoue et mise le double de la partie précédente.
Dès que la personne gagne, elle s'arrête de miser et garde son argent.
On note $X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ la v.a. qui indique l'argent de la après n parties de Pile ou Face.
On suppose que $X_0 = 100$. (Si la personne perd plusieurs fois, elle a une dette d'argent.)

1. Soit $n \geq 1$.
Si le joueur a perdu n fois, combien vaut X_n ?
Quelle est la probabilité qu'il perde n fois ?
2. Soit $n \geq 1$. Si le joueur perd $n-1$ fois puis gagne ensuite, combien vaut X_n ?
Quelle est la probabilité de cet événement ?
3. En déduire l'ensemble image $X_n(\Omega)$, ainsi que la loi de probas de X_n.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, pour tout $n \geq 1$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 100) \to_{n\to+\infty} 1$.
Ainsi, si la personne joue autant de fois qu'elle veut, elle repartira forcément gagnante.
6. Combien de fois la personne doit-elle jouer en moyenne pour repartir gagnante ?

7. On suppose maintenant que la personne ne peut pas s'endetter autant qu'elle veut. Si elle s'endette de plus de M yuan, pour $M > 0$, elle ne peut plus jouer et doit aller travailler pour payer sa dette.
Dans cette situation, est-ce qu'il est intéressant pour elle de jouer au jeu ?

---

1. Quand le joueur perd la première fois, il perd 100 yuan. Puis, 200 yuan. Puis, 400 yuan. Donc, en perdant n fois, il perd au total $100 + 200 + 400 + ldots + 2^{n-1}.100$ yuan.
On rappelle que $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.
Ainsi, on a $X_n(\omega) = 100 - (2^n - 1).100 = (2 - 2^n).100$.
En supposant chaque Pile ou Face indépendant des autres, la probabilité de perdre n fois de suite est de $\frac{1}{2^n}$.
2. Si le joueur a perdu $n-1$ fois, on a $X_{n-1}(\omega) = (2 - 2^{n-1}).100$.
Pour la partie suivante, le joueur mise $2^{n-1}.100$ yuan.
S'il gagne, on a donc $X_n(\omega) = (2 - 2^{n-1}).100 + 2^{n-1}.100 = 200$. En supposant chaque Pile ou Face indépendant des autres, la probabilité de perdre $n-1$ fois de suite puis de gagner est de $\frac{1}{2^n}$.
Si la personne gagne, elle repart avec 200 yuan, le double de son argent de départ.
3. Ainsi, pour $n \geq 1$ on a $X_n(\Omega) = \{(2 - 2^{n-1}).100, 200\}$.
On a $\mathbb{P}(X_n = (2 - 2^{n-1}).100) = \frac{1}{2^n}$, donc $\mathbb{P}(X_n = 200) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
4. On a alors $\mathbb{E}(X_n) = (2 - 2^{n-1}).100.\frac{1}{2^n} + 200.\frac{2^n-1}{2^n} = \frac{2^{n+1}-2^{n-1}}{2^n}.100 = \frac{(2^2-1)}{2}.100 = 150$.
5. On a $\mathbb{P}(X_n > 100) = s\mathbb{P}(X_n = 200) = 1 - \frac{1}{2^n} to_{n\to+\infty} 1$.
6. On pose τ la v.a. qui indique le premier instant n où la personne obtient 200 yuan.
En reprenant la question 2, on a alors $\mathbb{P}(\tau = n) = \frac{1}{2^n}$ si $n \geq 1$, et $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$.
La v.a. τ est une v.a. de loi géométrique, de paramètre $\frac{1}{2}$.
Donc, $\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
La personne joue en moyenne 2 fois avant de gagner.
7. Si la dette de la personne ne peut pas être infinie, il vaut mieux ne pas jouer.
Supposons que $(2 - 2^{n+1}).100 < M < (2 - 2^n).100$, pour un certain $n \geq 2$.
Cela veut dire que la personne peut perdre n fois de suite, mais que si elle perd une fois de plus (la $n+1$ ème fois) alors le jeu s'arrêtera et elle aura une dette de $(2 - 2^{n+1}.100$ yuan à rembourser.
La personne a donc une probabilité de $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ de repartir gagnante avec 200 yuan (gagner 100 yuan grâce au jeu), et une probabilité de $\frac{1}{2^{n+1}}$ de tout perdre et d'avoir une dette de $\sim -2^{n+1}.100$ yuan.
Pour $n = 11$, on a $2^{n+1} = 8192$, donc cela représenterait déjà une dette de ~ -819200 yuan.
Il ne faut pas jouer à ce jeu, on a une grande probabilité de gagner peu et une petite probabilité de perdre énormément. C'est à nouveau un cas de variable aléatoire où l'espérance est petite mais où la variance est extrêmement grande (cela indique que le résultat peut parfois s'éloigner énormément de la valeur moyenne).

Exercice 3. Trois chars font un combat.
Le char A atteint sa cible avec la probabilité $2/3$, le char B avec la probabilité $1/2$ et le char C avec la probabilité $1/3$.
Chaque char tire sur l'adversaire qui est le plus dangereux (la meilleure probabilité de toucher).
Ils tirent tous ensemble, et dès qu'un char est touché il est détruit. On considère à chaque instant la v.a. X_n qui indique l'ensemble des chars non détruits.

1. Donner E l'ensemble des cas possibles.
La suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov. Est-elle homogène ?
Si oui, calculer sa matrice de transition P, et sa distribution initiale μ.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_n$ est-elle régulière, irréductible, absorbante ?
3. Calculer sa matrice fondamentale F.
4. Quel char a le plus de chances de gagner le combat ?
5. Quelle est la probabilité qu'acun char ne gagne ?

---

1. L'ensemble des états est $E = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C, \emptyset\}$.
Pour $X \in \{A, B, C\}$, on note encore X l'événement "le char X atteint sa cible" (et donc $\bar{X}$ l'événement "le char X rate sa cible").
On a ainsi $P(A) = 2/3, P(B) = 1/2$ et $P(C) = 1/3$. Une fois qu'un char est descendu, il ne peut plus revenir et ainsi, on peut commencer par mettre un certain nombre de 0 dans la matrice de transition.
Si on est dans l'état A, B, C ou $\emptyset$, on est sur d'y rester (plus d'adversaires !).
S'il ne reste que 2 chars, par exemple A et B, on a $p_{AB,AB} = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (les 2 ratent !), $p_{AB,B} = P(\bar{A})P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (A rate, B réussit),$p_{AB,A} = P(A)P(\bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (A réussit, B rate) et $p_{AB,\emptyset} = P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (les 2 réussissent).
On procède de même pour AC et pour BC.
Si on a les 3 chars, A tire sur B, B et C tirent sur A (et personne ne tire sur C, donc il reste au moins C). On a alors $p_{ABC,ABC} = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p_{ABC,AC} = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p_{ABC,BC} = P(\bar{A})P(B \cup C) = P(\bar{A})(1 - P(\bar{B})P(\bar{C})) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{18}$ et $p_{ABC,C} = P(A)P(B \cup C) = P(A)(1 - P(\bar{B})P(\bar{C})) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{18}$.

On obtient ainsi la matrice et le graphe suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 2/9 & 2/9 & 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 2/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 & 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La distribution initiale est $\mu = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

2. La chaîne de Markov homogène finie $(X_n)_n$ est absorbante. L'ensemble de ses états absorbants est $\{A, B, C, \emptyset\}$.
3. En utilisant les résultats du cours, on pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$I - Q = \begin{pmatrix} 8/9 & 0 & -2/9 & -2/9 \\ 0 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} F = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 9/8 & 0 & 9/28 & 3/8 \\ 0 & 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$B = FR = \begin{pmatrix} 9/8 & 0 & 9/28 & 3/8 \\ 0 & 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/24 & 67/112 & 15/112 \\ 2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ 4/7 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

4. On pose τ_A la v.a. telle que $\tau_A(\omega) = \inf\{n, \text{ t.q. } X_n(\omega) = A\}$.
On définit de même τ_B, τ_C, $\tau_\emptyset$.
Comme chaque état $A, B, C, \emptyset$ est absorbant, on a alors, $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}(X_n = A)) = \mathbb{P}(\tau_A < +\infty)$.
Les résultats du cours disent que cette probabilité se calcule à partir de μ (la loi de X_0) et de la matrie B.
Comme on a $X_0 = ABC$, on obtient $\mathbb{P}(\tau_A < +\infty) = 1/7$, $\mathbb{P}(\tau_B < +\infty) = 1/24$, $\mathbb{P}(\tau_C < +\infty) = 67/112$.
Donc, c'est le char C, le moins précis, qui a le plus de chance de survivre.
5. On obtient aussi que la probabilité que tous les chars soient détruits est $\mathbb{P}(\tau_\emptyset < +\infty)$.
Cette probabilité vaut alors $15/112$.