Feuille de TD n° 14

Chaînes de Markov, Variables aléatoires

25 mai 2022

Exercice 1. Toute matrice stochastique de taille 2×2 s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \quad \text{avec } p, q \in [0,1]$$

1. Dire, en fonction de p et q, quand P donne une chaîne de Markov absorbante, irréductible, régulière.
2. Montrer que la matrice

   $$\Pi = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

   est un projecteur $\left(\Pi^2 = \Pi\right)$ qui commute avec P.
   Calculer son noyau $Ker(\Pi)$ et son image $Im(\Pi)$.
3. Soit $Q = P - \Pi$. Montrer que $Q\Pi = \Pi Q = 0$.
   Calculer Q^2 en fonction de Q.
4. En déduire une expression de Q^n, pour tout $n \geq 1$.
5. Déduire des résultats précédents une expression de P^n, pour tout $n \geq 1$.
   Discuter la limite de P^n lorsque $n \to \infty$ en fonction de p et q.

Exercice 2. Une personne joue à un jeu de Pile ou Face équilibré ($p = 0.5$).
La première fois, elle mise 100 yuan.
Si la personne perd, elle rejoue et mise 200 yuan.
A chaque fois que la personne perd, elle rejoue et mise le double de la partie précédente.
Dès que la personne gagne, elle s'arrête de miser et garde son argent.
On note $X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ la v.a. qui indique l'argent de la après n parties de Pile ou Face.
On suppose que $X_0 = 100$. (Si la personne perd plusieurs fois, elle a une dette d'argent.)

1. Soit $n \geq 1$.
   Si le joueur a perdu n fois, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité qu'il perde n fois ?
2. Soit $n \geq 1$. Si le joueur perd $n-1$ fois puis gagne ensuite, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité de cet événement ?
3. En déduire l'ensemble image $X_n(\Omega)$, ainsi que la loi de probas de X_n.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, pour tout $n \geq 1$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 100) \to_{n\to+\infty} 1$.
   Ainsi, si la personne joue autant de fois qu'elle veut, elle repartira forcément gagnante.
6. Combien de fois la personne doit-elle jouer en moyenne pour repartir gagnante ?
7. On suppose maintenant que la personne ne peut pas s'endetter autant qu'elle veut. Si elle s'endette de plus de M yuan, pour $M > 0$, elle ne peut plus jouer et doit aller travailler pour payer sa dette.
   Dans cette situation, est-ce qu'il est intéressant pour elle de jouer au jeu ?

Exercice 3. Trois chars font un combat.
Le char A atteint sa cible avec la probabilité $2/3$, le char B avec la probabilité $1/2$ et le char C avec la probabilité $1/3$.
Chaque char tire sur l'adversaire qui est le plus dangereux (la meilleure probabilité de toucher).
Ils tirent tous ensemble, et dès qu'un char est touché il est détruit. On considère à chaque instant la v.a. X_n qui indique l'ensemble des chars non détruits.

1. Donner E l'ensemble des cas possibles.
   La suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov. Est-elle homogène ?
   Si oui, calculer sa matrice de transition P, et sa distribution initiale μ.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_n$ est-elle régulière, irréductible, absorbante ?
3. Calculer sa matrice fondamentale F.
4. Quel char a le plus de chances de gagner le combat ?
5. Quelle est la probabilité qu'acun char ne gagne ?