Feuille de TD n° 2

Sigma-algèbres, mesures de probabilités

9 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

On lance deux dés. L'ensemble des résultats possibles (l'univers) est donc

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$

Il y a $6 \times 6 = 36$ cas possibles.
• La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ associée à l'expérience est la mesure uniforme sur Ω.
Pour $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. On va donc compter le nombre d'éléments de A (le nombre de cas favorables) pour calculer $\mathbb{P}(A)$ dans chaque cas.

1. Il y a 11 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{11}{36}$.
2. Il y a 27 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.
3. Il y a 18 cas favorables, donc la probabilité est de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).
On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probas uniforme $\mathbb{P}$.

1. On note C l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1.
Calculer $\mathbb{P}(C)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?

Pour la mesure de probas uniforme, il faut dénombrer chaque ensemble pour calculer des probabilités.
On rappelle que $Card(\Omega) = n!$

1. On a $Card(C) = (n-1)!$. Pour un tirage tel que 1 sort en première position, il reste $n-1$ positions pour $n-1$ boules.
Ainsi $\mathbb{P}(C) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.
Cette probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. On avait trouvé la semaine dernière : $Card(A) = (n-2)(n-3)! = (n-2)!$.
Donc, $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.
Cette probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
3. On avait trouvé la semaine dernière $Card(B)\frac{n!}{6}$.
Donc, $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{n!} = \frac{1}{6}$.
Cette probabilité ne dépend pas de n, elle est constante, donc de limite $\frac{1}{6}$.
Quand n grandit, les événements A et C deviennent de "plus en plus rares", tandis que B reste "fréquent".

Exercice 3.

1. Soit $m \geq 1$. Sur $\{1, \ldots, m\}$ écrire la mesure de probabilité uniforme U comme somme de mesures de *Dirac* δ_w.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une sigma-algèbre sur Ω.
Soient $P_1, \ldots, P_m$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient $p_1, \ldots, p_m \in [0, 1]$ des réels tels que $p_1 + \ldots + p_m = 1$.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{m} p_k P_k$ est une mesure de probabilité.
Soient maintenant $(Q_n)_{n\geq 0}$ des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et $(q_n)_{n\geq 0}$ des réels positifs tels que $\sum_{k\geq 0} q_k = 1$.

3. Montrer que la fonction $f = \sum_{k\geq 0} q_k Q_k$ est bien définie sur $\mathcal{A}$.
4. On veut montrer que f est une mesure de probabilité. Quel théorème du cours est utile dans la preuve ?

---

1. On a $U = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\delta_k$.
2. Il faut montrer les deux conditions de la définition de mesure de probas.
   Premièrement, on a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_k p_k = 1$.
   Ensuite, soit $(A_l)_{l\geq 0}$ une famille de parties disjointes de Ω, contenues dans $\mathcal{A}$.
   On a alors $\mathbb{P}(\bigcup_l A_l) = \sum_{k=1}^m p_k P_k(\bigcup_l A_l) = \sum_{k=1}^m p_k \sum_{l\geq 0} P_k(A_l) = \sum_{l\geq 0}\sum_k p_k P_k(A_l) = \sum_{l\geq 0}\mathbb{P}(A_l)$.
   Donc $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probas.
3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $Q_k(A) \in [0,1]$. La série des $q_k Q_k(A)$ est une série à termes positifs, et $q_k Q_k(A) \leq q_k$.
   Comme on a $\sum_{k\geq 0} q_k = 1$, on en déduit que la série des $q_k Q_k(A)$ est convergente (série à termes positifs qui est majorée).
   Donc, $f(A) = \sum_{k\geq 0} q_k Q_k(A)$ est bien défini.
4. Pour montrer que f est une mesure de probabilité, il faut utiliser un théorème d'interversion de sommes.
   On que $f(\Omega) = \sum_{k\geq 0} q_k = 1$.
   Et, pour $(A_l)_{l\geq 0}$ une famille de parties disjointes de Ω, contenues dans $\mathcal{A}$, on va vouloir montrer que $\sum_k q_k \sum_l Q_k(A_l) = \sum_l \sum_k q_k Q_k(A_l)$ (d'un côté cela vaut $f(\bigcup_l A_l)$, de l'autre cela vaut $\sum_l f(A_l)$).
   Comme on regarde des sommes de réels positifs, on peut utiliser le théorème de Fubini ou le théorème de sommation par paquets.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble non-vide. Soit A une partie de Ω.
• Quelles sont les 3 opérations que l'on peut faire dans une sigma-algèbre ? Quels sont les éléments toujours présents dans une sigma-algèbre ?
• Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une sigma-algèbre.
• Si Ω est fini ou dénombrable, quelle est la seule sigma-algèbre sur Ω qui contient tous les singletons ?

• Une sigma-algèbre est stable par passage au complémentaire, réunion dénombrable, intersection dénombrable. Une sigma-algèbre contient toujours $\emptyset$ et Ω.
• $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$ et Ω. Pour tout élément B dans $\mathcal{A}$, $\bar{B}$ est aussi dans $\mathcal{A}$.
Pour toute famille d'éléments $(B_n)_n$ dans $\mathcal{A}$, l'intersection $\bigcup_n B_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$, et la réunion $\bigcap_n B_n$ est encore un élément de $\mathcal{A}$.
Cet ensemble est donc bien stable par complémentaire, réunion dénombrable, intersection dénombrable. C'est une sigma-algèbre sur Ω.
• C'est $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On suppose que les personnes de l'assemblée ont été choisies sans aucun biais parmi la population.
2. Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à ce choix ?
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
3. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

---

1. Dans notre cas l'ensemble Ω est
   $$\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$$
   On a donc $Card(\Omega) = 365^n$. Il y a 365^n répartitions possibles de dates d'anniversaires.
2. C'est la mesure de probabilité uniforme.
3. On a $\bar{A} = \{$ « tous les invités on une date d'anniversaire différente »$\}$. Donc, $Card(\bar{A}) = \binom{365}{n}$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\binom{365}{n}}{365^n}$.
4. On en déduit que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{365}{n}}{365^n}$.
   Quand $n \geq 366$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$.
   Pour $2 \leq n \leq 365$, on a $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365\times\ldots(365-n+1)}{365^n}\frac{1}{n!}$.
   Cette probabilité croit vers 1 plus vite qu'on le pense.
   Lorsqu'il y a plus 40 personnes la probabilité $P(A)$ est supérieure à $0,9$.

Exercice 6.
Soient $1 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble

à p éléments.
On pose sur le couple $(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Combien vaut $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$?
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\{\emptyset\})$.
3. On pose B l'ensemble des parties de E telles qui contiennent exactement un élément de A.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$.
   Comment varie cette probabilité en fonction de n et de p ?

---

1. On a $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))) = 2^{2^n}$.
2. On a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (partie à 0 éléments de $\mathcal{P}(E)$) et $\mathbb{P}(\{\emptyset\}) = \frac{1}{2^n}$ (partie à 1 élément de $\mathcal{P}(E)$).
3. On a calculé la semaine dernière que $Card(B) = p2^{n-p}$.
   On obtient ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(B)}{Card(\mathcal{P}(E)} = \frac{p}{2^p}$.
   La probabilité obtenue ne dépend pas de n, le nombre d'éléments de E.
   Pour $p \geq 1$, cette probabilité est décroissante quand p croit, et tend vers 0 quand $p \to +\infty$.

■ *Pour aller plus loin . . .*