Feuille de TD n° 2

Sigma-algèbres, mesures de probabilités

9 mars 2022

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

Exercice 2.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).
On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probas uniforme $\mathbb{P}$.

1. On note C l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1.
   Calculer $\mathbb{P}(C)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?

Exercice 3.

1. Soit $m \geq 1$. Sur $\{1, \ldots, m\}$ écrire la mesure de probabilité uniforme U comme somme de mesures de *Dirac* δ_w.
   Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une sigma-algèbre sur Ω.
   Soient $P_1, \ldots, P_m$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient $p_1, \ldots, p_m \in [0, 1]$ des réels tels que $p_1 + \ldots + p_m = 1$.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{m} p_k P_k$ est une mesure de probabilité.
   Soient maintenant $(Q_n)_{n\geq 0}$ des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et $(q_n)_{n\geq 0}$ des réels positifs tels que $\sum_{k\geq 0} q_k = 1$.
3. Montrer que la fonction $f = \sum_{k\geq 0} q_k Q_k$ est bien définie sur $\mathcal{A}$.
4. On veut montrer que f est une mesure de probabilité. Quel théorème du cours est utile dans la preuve ?

Exercice 4. Soit Ω un ensemble non-vide. Soit A une partie de Ω.
• Quelles sont les 3 opérations que l'on peut faire dans une sigma-algèbre ? Quels sont les éléments toujours présents dans une sigma-algèbre ?
• Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une sigma-algèbre.
• Si Ω est fini ou dénombrable, quelle est la seule sigma-algèbre sur Ω qui contient tous les singletons ?

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On suppose que les personnes de l'assemblée ont été choisies sans aucun biais parmi la population.
2. Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à ce choix ?
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
3. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 6.
Soient $1 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.
On pose sur le couple $(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Combien vaut $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$?
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\{\emptyset\})$.
3. On pose B l'ensemble des parties de E telles qui contiennent exactement un élément de A.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$.
   Comment varie cette probabilité en fonction de n et de p ?