Feuille de TD n$^{\circ}$ 3

Mesures de probabilité

18 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $n \geq 1$. Soit $E = \{1, \dots, n\}$.

1. Exprimer la mesure de probas uniforme U sur $(E, \mathcal{P}(E))$ comme combinaison linéaire de mesures de Dirac δ_ω. On pose $f = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}\delta_n$.
2. Quelle expérience aléatoire peut être associée à la mesure de probabilité f ?
3. Calculer $f(\{1, n\})$ et $f(2\mathbb{N} \cap E)$.

Exercice 2. Dans un jeu de 52 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de pique (♠) par un second as de pique.
Un joueur choisit au hasard de façon uniforme 3 cartes.
• Quel ensemble Ω et quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ faut-il prendre pour modéliser cette expérience ?
• Quelle est la probabilité qu'il s'aperçoive de la tricherie ?

Exercice 3. Soit $N > 0$. Une boîte contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On tire N boules successivement sans les remettre.

1. Donner l'ensemble Ω qui représente tous les tirages possibles.
   Calculer $Card(\Omega)$. On note l'événement.

   $$A : \text{ « on tire au moins un numéro inférieur ou égal à } N \text{ »}$$

   .
2. Calculer $Card(\bar{A})$, et en déduire $Card(A)$.
   On suppose que les boules sont toutes identiques (sauf leur numéro), et qu'on mélange les boules de la boîte avant chaque tirage.
3. Quelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à cette façon de tirer les boules ?
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
5. En utilisant la formule de Stirling

   $$N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N},$$

   étudier la limite de $P(A)$ quand N tend vers ∞ ?

Exercice 4. Soient $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble et $x,\ y$ deux réels.
Montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = x \text{ et } \mathbb{P}(\{b, c\}) = y$$

si et seulement si $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ et $x + y \geq 1$.
On pourra s'aider de l'exercice ..

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Soient $A_n \subset \Omega$.
On appelle *limite supérieure* des A_n, notée $\limsup_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.
On appelle *limite inférieure* des A_n, notée $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
   Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.
2. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω.
   Montrer que si $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ appartiennent aussi à $\mathcal{A}$.
3. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$;
   (b) $A_n =]-\infty, -n]$;

(c) $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;

(d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Pour aller plus loin . . .

Exercice 7. On place 11 boules dans une boîte. 10 boules bleues, 1 boule rouge.

1. Soit $n \geq 1$. On tire au hasard uniforme n boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans la boîte.
   Décrire l'ensemble Ω et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ associés.
2. Calculer p_1, la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.
3. On pose $E = \{B, R\}^n$ l'ensemble de toutes les répartitions de couleurs que l'on peut voir dans les tirages.
   Dans l'expérience du tirage, les ensembles Ω et E sont reliés. Trouver une fonction $X : \Omega \to E$ qui donne ce lien.
   Sur $(E, \mathcal{P}(E))$ on définit $\mathbb{P}_2$ par $\mathbb{P}_2(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
4. Montrer que $\mathbb{P}_2$ est une mesure de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_2(\{(B, \ldots, B)\})$.
6. Pour tout $e \in E$, on pose k_e le nombre de B qui apparaissent dans e.
   Calculer $\mathbb{P}_2(\{e\})$ en fonction de k_e.
7. Pour $1 \leq k \leq n$, en déduire déduire p_2, la probabilité de tirer exactement k boules bleues.

Remarque : La fonction $X : \Omega \to E$ est ce qu'on appelle une variable aléatoire. Avec elle on obtient par exemple de nouvelles mesures de probabilité sur des ensembles différents.