# Feuille de TD n°

*Sujet*

23 mars 2022

---

## ■ *Pour commencer . . .*

**Exercice 1.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient $A$ et $B$ deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

**Exercice 2.** Soient $N \geq 2$ et $p \in [0, 1]$.
On place $N$ coffres dans une pièce. Avec une probabilité $p$ on place un trésor dans l'un de ces coffres. Si on place le trésor, on choisit un coffre de façon équiprobable ("même probabilité").
• Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise l'expérience.
On pourra écrire la loi de la mesure de probas $\mathbb{P}$.
• Une personne a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'elle trouve le trésor dans le dernier coffre ?
• Donner un équivalent de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

**Exercice 3.**
Soit $n \geq 2$.
Un facteur possède $n$ lettres adressées à $n$ destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte, sans pouvoir les distinguer.

1. Quel espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélise la situation de l'énoncé ?
2. Quelle est la probabilité $q_1$ que chaque lettre arrive à la bonne destination ?
3. On prend $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Quelle est la probabilité $q_2$ que les lettres numéro $i_1, \ldots, i_k$ arrivent à la bonne adresse ?
4. Quelle est la probabilité $p_n$ qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
   On pourra utiliser les propriétés de $\mathbb{P}$ et la formule de Poincaré de l'exercice 6.
5. Donner la limite de $p_n$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 4.**
Soient $N \geq 2$ et $p \in [0, 1]$. Une information $I$ est transmise à l'intérieur d'une population de $N$ personnes.
La première personne possède l'information $I$.
Chaque fois qu'une personne transmet son information, il y a une probabilité $p$ pour qu'elle la transmette correctement. Il y a une probabilité $1 - p$ pour qu'elle se trompe et transmette l'information contraire.

1. Quel est l'ensemble $\Omega$ qui modélise la situation ?
   On suppose que la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise la situation est construite.
   On pourra pose $I_k$ :"l'information après $k$ transmissions est $I$".
2. Traduire les informations de l'énoncé en termes de probabilités conditionnelles.
   Pour $n \geq N$, on note $p_n$ la probabilité que l'information après $n$ transmissions soit l'information $I$.
3. Donner une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$.
4. En déduire la valeur de $p_n$ en fonction de $p$ et de $n$.
5. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$ lorsque $N$ et $n$ tendent vers $+\infty$.
   Qu'en pensez-vous ?

## ■ *Pour aller plus loin . . .*

**Exercice 5.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout évènement $A$ et $B$

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

On pourra commencer par vérifier que l'inégalité est vérifiée $A$ si $A \cap B = \emptyset$.

**Exercice 6.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k$$

où

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$