Feuille de TD n° 5

Conditionnement, indépendance, variables aléatoires

29 mars 2022

Exercice 1. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard uniforme.

1. Quel est l'univers Ω ?
   On ne cherchera pas à calculer explicitement la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise cet exemple.
2. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$.
3. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire.
4. En déduire la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai.
5. Retrouver directement ce résultat en utilisant un ensemble Ω' plus simple, muni de la mesure uniforme, grâce à un argument de probabilités égales (d'équiprobabilité).

---

1. On numérote les clefs de 1 à n et note l le numéro de la clef qui ouvert la porte. L'univers est alors l'ensemble des suites $(i_1, \dots, i_k)$ de numéros deux à deux distincts tels que $i_k = l$.
2. L'événement E_1 est réalisé si la première clef choisie n'est pas la bonne. On a donc
   $$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n-1}{n}$$
   De même, l'événement $E_1 \cap E_2$ est réalisé si les deux premières clefs choisies ne sont pas la bonne. On a
   $$\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_1)} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-2}{n-1}.$$
3. L'événement S_k est réalisé si pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, E_j est réalisé et $\overline{E}_k$ est réalisé. On a donc :
   $$S_k = E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k.$$
4. On a :
   $$\begin{array}{rcl} u_k & = & \mathbb{P}(S_k) \\ & = & \mathbb{P}(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1} \cap \overline{E}_k) \\ & = & \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2 \mid E_1) \ldots \mathbb{P}(E_{k-1} \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-2})\mathbb{P}(\overline{E}_k \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \\ & = & \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1} \\ & = & \frac{1}{n} \end{array}$$
5. On modifie l'expérience. On tire toute les clefs en conservant l'ordre dans lequel on tire ces clefs. L'univers contient alors $n!$ éléments. Un réslutat $(i_1, \dots, i_n)$ réalise S_k si $i_k = l$. Il y a donc $(n-1)!$ cas favorables pour $n!$ possibles. On obtient donc de nouveau l'égalité :
   $$u_k = \frac{1}{n}$$

Exercice 2. Soient $b, d, r \geq 0$.
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On réalise l'expérience suivante :
• On tire une boule de l'urne au hasard uniforme, et on note sa couleur.
• On remet la boule dans l'urne, et on ajoute d boules de la même couleur.
On répète l'expérience autant de fois que l'on veut.
Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.
On pourra utiliser une récurrence, et des probabilités conditionnelles sachant le résultat du 1er tirage.

On pose B_i l'événement "une boule blanche est tirée au i-ème tirage".
On pose R_i l'événement "une boule rouge est tirée au i-ème tirage".
Au premier tirage, on a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{b+r}$.
Pour le second tirage, on calcule :

$$\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

On va démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{b}{b+r}$.
Initialisation : Ok.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que le résultat est vrai pour $n \geq 1$.
On ne peut pas utiliser $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)$ dans nos calculs, car on ne sait pas exactement combien de boules sont contenues dans l'urne quand B_n est vrai (l'événement B_n ne donne pas le

nombre de boules dans l'urne). A part B_1.
Regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)$. Après 1 tirage, si B_1 est vrai, on a $b+d$ boules blanches et r boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.
Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b+d$ boules blanches et $r' = r$ boules rouges.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b+d}{b+d+r}$.
De même, regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)$. Après 1 tirage, si R_1 est vrai, on a b boules blanches et $r+d$ boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.
Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b$ boules blanches et $r' = r+d$ boules rouges.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b}{b+d+r}$.
On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r}\times\frac{b}{b+r}+\frac{b}{b+d+r}\times\frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

Exercice 3.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des v.a. discrètes.

1. Montrer que $X+Y$ est une v.a. discrète.
2. Montrer que XY est une v.a. discrète.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   On pose $X(\Omega) = \{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ (avec $N = +\infty$ si $X(\Omega)$ est dénombrable), et $A_n = X^{-1}(\{x_n\})$.
4. Démontrer que $X = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$.
5. En déduire une expression de $f(X)$.
6. Pour $Y = \sum_{m=0}^{M} y_m \mathbb{1}_{B_m}$, en déduire une expression de XY.
7. Exprimer $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\})$ en fonction des A_k.
   Calculer cette somme.
8. Si l'on connaît la loi de X (la fonction $\mathbb{P}_X$), peut-on retrouver la fonction X ?

Comme X et Y sont des v.a., pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $X^{-1}(\{x\}), Y^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$. Commes X et Y sont des v.a. discrètes, on a $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ finis ou dénombrables.

1. On remarque d'abord que $(X+Y)(\Omega) \subset X(\Omega)+Y(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.
   Montrons donc que $X+Y$ est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $(X+Y)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x\in X(\Omega), y\in Y(\Omega), x+y=z}(X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}))$. C'est une réunion finie ou dénombrable d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, $X+Y$ est une v.a. discrète.
2. On a $(XY)(\Omega) \subset \{xy,\ x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$, donc cet ensemble est fini ou dénombrable.
   Montrons donc que XY est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $(XY)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x\in X(\Omega), y\in Y(\Omega), xy=z}(X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}))$.
   C'est une réunion finie ou dénombrable d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, XY est une v.a. discrète.
3. Comme $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, $f(X)(\Omega))$ est fini ou dénombrable.
   Montrons donc que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f(X)^{-1}(\{z\}) = \bigcup_{x\in X(\Omega), f(x)=z} X^{-1}(\{x\})$. C'est une réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, donc c'est un élément de $\mathcal{A}$.
   Ainsi, XY est une v.a. discrète.
4. Comme les A_n sont disjoints, la fonction $\sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$ est donc bien définie : pour tout $\omega \in \Omega$, au plus un seul terme de la somme est non-nul.
   Soit $\omega \in \Omega$. Comme $\Omega = X^{-1}(X(\Omega)) = \cup_n A_n$, il existe $n \geq 0$ tel que $\omega \in A_n$. Cela veut dire que $X(\omega) = x_n$.
   On a donc $X(\omega) = x_n = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$.
   Ainsi, ces deux fonctions sont égales.
5. On a $f(X) = \sum_{n=0}^{N} f(x_n)\mathbb{1}_{A_n}$.
   Cela se prouve de la même façon que la question précédente.
6. On a $XY = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} x_n y_m \mathbb{1}_{A_n \cap B_m}$.
   La fonction de droite est bien définie car pour tout $\omega \in \Omega$, au plus un seul terme est non-nul (les $A_n \cap B_m$ sont tous disjoints).
7. On a $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_n A_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
8. Non.
   La fonction $\mathbb{P}_X$ indique seulement la probabilité que la fonction X prenne chaque valeur $x_n \in X(\Omega)$. Cette mesure de probas n'indique pas la valeur exacte de $X(\omega)$.
   Exemple : Pour $A, B \subset \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$, les fonctions $X = \mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_{\bar{A}}$ et $Y = \mathbb{1}_B + 2\mathbb{1}_{\bar{B}}$ ont pour loi de probabilité la fonction $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}(A)\delta_1 + (1-\mathbb{P}(A))\delta_2$.
   On ne sait pas quels ω dans Ω donneront 1 et lesquels donneront 2, mais on sait que la proba que $X(\omega) = 1$ est $\mathbb{P}(A)$.
   Et c'est en fait tout ce qui nous intéresse.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X (*i.e.* calculer $\mathbb{P}(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) dans les cas suivants :

1. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n+1) = \frac{4}{n+1}\mathbb{P}(X=n).$$

2. On suppose que X ne s'annule pas et qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n).$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n+1) = (1-p) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$
En déduire la loi de probabilité suivie par X.

---

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0)\frac{4^n}{n!}.$$
En utilisant à nouveau le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0)\dfrac{4^n}{n!} = 1$ on obtient
$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$
Donc X suit une loi de poisson de paramètre 4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(X = n+1) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n) - p \cdot \mathbb{P}(X \geq n+1) = p \cdot \mathbb{P}(X = n)$$
D'où la relation de récurrence
$$\mathbb{P}(X = n+1) = (1-p)\mathbb{P}(X = n).$$
Par récurrence $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X = 1)$.
Enfin, on a l'égalité :
$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{p}.$$
D'où
$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$
Donc X suit une loi géométrique de paramètre p.