Feuille de TD n° 5

Conditionnement, indépendance, variables aléatoires

29 mars 2022

Exercice 1. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard uniforme.

1. Quel est l'univers Ω ?
   On ne cherchera pas à calculer explicitement la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise cet exemple.
2. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$.
3. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire.
4. En déduire la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai.
5. Retrouver directement ce résultat en utilisant un ensemble Ω' plus simple, muni de la mesure uniforme, grâce à un argument de probabilités égales (d'équiprobabilité).

Exercice 2. Soient $b, d, r \geq 0$.
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On réalise l'expérience suivante :
• On tire une boule de l'urne au hasard uniforme, et on note sa couleur.
• On remet la boule dans l'urne, et on ajoute d boules de la même couleur.
On répète l'expérience autant de fois que l'on veut.
Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.
On pourra utiliser une récurrence, et des probabilités conditionnelles sachant le résultat du 1er tirage.

Exercice 3.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des v.a. discrètes.

1. Montrer que $X + Y$ est une v.a. discrète.
2. Montrer que XY est une v.a. discrète.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   On pose $X(\Omega) = \{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ (avec $N = +\infty$ si $X(\Omega)$ est dénombrable), et $A_n = X^{-1}(\{x_n\})$.
4. Démontrer que $X = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$.
5. En déduire une expression de $f(X)$.
6. Pour $Y = \sum_{m=0}^{M} y_m \mathbb{1}_{B_m}$, en déduire une expression de XY.
7. Exprimer $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\})$ en fonction des A_k.
   Calculer cette somme.
8. Si l'on connaît la loi de X (la fonction $\mathbb{P}_X$), peut-on retrouver la fonction X ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X (*i.e.* calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) dans les cas suivants :

1. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n+1) = \frac{4}{n+1} \mathbb{P}(X = n).$$
2. On suppose que X ne s'annule pas et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n).$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n+1) = (1 - p) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$
   En déduire la loi de probabilité suivie par X.