Feuille de TD n° 6

Variables aléatoires

14 avril 2022

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit E un ensemble. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. discrètes sur Ω, à valeurs dans E. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.
On définit une fonction $Y : \Omega \to E$ par $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.
Remarque : Cette construction de v.a. (aussi notée X_N) est très utilisée en probabilités. Pour $\omega \in \Omega$, au lieu de regarder la suite $(X_n(\omega))_n$, on "s'arrête" au terme numéro $N(\omega)$. La v.a. N est appelée un *temps d'arrêt.*

---

1. Y est à valeurs discrètes car $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega)$. C'est donc un ensemble au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
   Il faut donc montrer maintenant que pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a $Y^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$.
2. Pour tout $y \in Y(\Omega)$,
$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{y\}) &= \{\omega \in \Omega \mid X_{N(\omega)}(\omega) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big((N = n) \cap (X_n = y) \Big) \end{aligned}$$
   Par stabilité d'une tribu par union et intersection dénombrable, $Y^{-1}(\{y\})$ appartient bien à la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 2. Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face, avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux.
Soit $n \geq 1$. On note X_n la v.a. qui donne le nombre de Pile obtenus avec les n premiers lancers.
On note Y la v.a. qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier Face, avec $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais Face.

1. Donner l'ensemble image des v.a. X_n, et calculer leur lois de probabilités.
2. Calculer leur espérance $\mathbb{E}(X_n)$.
3. Donner l'ensemble image de la v.a. Y, et calculer $\mathbb{P}(Y = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(Y < +\infty) = 1$.
5. En déduire que l'on peut considérer Y comme une v.a. réelle, et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = Y^{-1}(\{n\})$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
7. On définit la v.a. $X_Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $X_Y(\omega) = X_{Y(\omega)}(\omega)$ si $Y(\omega) < +\infty$, et $+\infty$ sinon.
   Trouver une relation entre X_Y et Y.

---

1. La v.a. X_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.
   Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\mathbb{P}(X_n^{-1}(\{k\})) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
   Obtenir k Pile exactement avec n lancers, c'est choisir k positions parmi n, faire Pile à ces k positions, et faire Face aux $n-k$ autres positions.
2. On a $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$. On utilise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour obtenir cette égalité.
   On verra plus tard dans le cours une autre façon d'obtenir ce résultat.
3. L'ensemble image de Y est $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
   On a $\mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}(1-p)$, car les lancers sont tous indépendants.
4. On a $\mathbb{P}(Y < +\infty) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n\geq 1} p^{n-1}(1-p) = \frac{1-p}{1-p} = 1$.
5. On a alors $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$. Cela veut dire que presque sûrement, la v.a. Y est à valeurs finies. Les évènements de probabilité nulle sont "invisibles" quand on calcule des probabilités ou des espérances.
   On a alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n\geq 1} np^{n-1}(1-p) = (1-p)\sum_{k\geq 0} p^k(k+1) = \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$.
6. Ces événements sont disjoints, et tous de probabilité non-nulle. Ils ne sont donc pas indépendants.
   On a $\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = 0 \neq \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m)$.
7. Si $Y(\omega) = n$, les $n-1$ premiers lancers ont donné Pile. Donc, on a $X_Y(\omega) = X_n(\omega) = n - 1$.
   Si $Y(\omega) = +\infty$, on a $X_Y(\omega) = +\infty$.
   On remarque donc que $X_Y = Y - 1$.

Exercice 3. Un sportif tente de franchir en sautant des hauteurs successives numérotées 1, ... , n,... .
On suppose que tous les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n est de $\frac{1}{n}$.
On pose X la v.a. qui indique la dernière hauteur franchie avant le premier échec.
Quelle est le domaine d'arrivée de la v.a. X ?
Montrer que la v.a. X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Déterminer la loi de probas de X.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

• La fonction X est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On a $X : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (on ne connaît pas exactement l'ensemble Ω, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse).
• Pour montrer que X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement, il faut montrer que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.
Pour tout $i \geq 1$ on pose A_i : "le saut ni est réussi".
On a alors $(X = +\infty) = \cap_{i\geq 1} A_i$.
Ainsi, par indépendance de la famille des (A_i), on a : $\mathbb{P}(X = +\infty) = \Pi_{i\geq 1} \frac{1}{i} = 0$.
• Déterminer la loi de probas de X, c'est calculer les probabilités $\mathbb{P}(X^{-1}(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$, pour tout $k \geq 1$ (et pour $+\infty$, mais on l'a déjà calculée).
Pour tout $i \geq 1$ on pose A_i : "le saut ni est réussi".
Alors, on a $X^{-1}(\{k\}) = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$.
Comme les sauts sont indépendants, les évènement A_i sont mutuellement indépendants. Cela donne donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

• La série $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k \frac{k}{(k+1)!}$ est une série à termes positifs, qui est convergente.
En écrivant $k^2 = k(k+1)-k = (k+1)k-(k+1)+1$, qui donne $\frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}$, on obtient que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k \frac{k}{(k+1)!} = e - 1.$.

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face (on associe 1 à Pile et 0 à Face), où on lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux, et qu'il y a probabilité p de faire Pile.
Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le résultat du lancer numéro n. Ce sont des v.a. discrètes.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
   Discuter selon la valeur de p.
2. On définit la v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ par $T(\omega) = \inf\{n \text{ t.q. } X_{n-1}(\omega) \neq X_n(\omega)\}$ si cet ensemble est non vide, et $T(\omega) = +\infty$ sinon.
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. On définit la v.a. $X_T : \Omega \to \{0, 1\}$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
   Pour quelles valeurs de p a-t-on

$$\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1, 0)) = \mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0, 1))?$$

---

1. On a $(X_{n-1} \neq X_n) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n-1} = 0) \cup \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n-1} = 1)$ dont on déduit

$$\mathbb{P}(A_n) = 2p(1-p).$$

De plus,

$$A_n \cap A_{n-1} = (X_n = 0, X_{n-1} = 1, X_{n+1} = 1) \cup (X_n = 1, X_{n-1} = 0, X_{n+1} = 0)$$

Dont on déduit

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1}) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p).$$

Comme $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n-1}) = 4p^2(1-p)^2$, on en déduit que nécessairement $p = \dfrac{1}{2}$, et alors deux A_k adjacents sont indépendants. On montre de même que pour r ensembles A_{k_i}, $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^r.$$

On procède par récurrence sur r :
Initialisation : le résultat est déjà prouvé pour $r = 1$ (ici $p = \dfrac{1}{2}$)
Supposons la propriété vraie pour $r \geq 2$ et soit $r + 1$ ensembles A_{k_i}, $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r+1}$.
1/ Si $k_{r+1} - k_r \geq 2$, alors $A_{k_{r+1}}$ s'exprime en fonction de $X_{k_{r+1}-1}$ et $X_{k_{r+1}}$ tandis que $\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}$ s'exprime en fonction de X_1, ..., X_{k_r}. Or pr hypothèse les lancers en $k_{r+1} - 1$ et k_{r+1} sont indépendants des lancers précédents, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap A_{k_{r+1}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) \times \mathbb{P}(A_{k_{r+1}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^r \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}.$$

2/ Si $k_{r+1} = k_r + 1$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i} = \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0, X_{k_r+1} = 1)\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 1, X_{k_r+1} = 0)\right)$$

Mais par hypothèse, $\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0)$ est indépendant de $(X_{k_r+1} = 1)$ et même chose pour les évènements complémentaires. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} A_{k_i}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0)\right) \mathbb{P}\left(X_{k_r+1} = 1\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 1)\right) \mathbb{P}\left(X_{k_r+1} = 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 0)\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i} \cap (X_{k_r} = 1)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}
\end{aligned}$$

2. (a) Pour $n \geq 2$, il vient $\mathbb{P}(T = n) = p^{n-1}(1-p) + (1-p)^{n-1}p$.

   (b) $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T = n) = (1-p)\sum_{n \geq 1} p^n + p\sum_{n \geq 1}(1-p)^n = 1$.

3. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0,1)) &= \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}((X_n, X_{n+1}) = (0,1), T = n)) \\
&= \sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{n-1} = 1, X_n = 0, X_{n+1} = 1) \\
&= \sum_{n \geq 2} (1-p)p^n = p^2
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1,0)) = (1-p)^2$ et on trouve $p = \dfrac{1}{2}$.