Feuille de TD n° 6

Variables aléatoires

14 avril 2022

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit E un ensemble. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. discrètes sur Ω, à valeurs dans E. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.
On définit une fonction $Y : \Omega \to E$ par $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.
Remarque : Cette construction de v.a. (aussi notée X_N) est très utilisée en probabilités. Pour $\omega \in \Omega$, au lieu de regarder la suite $(X_n(\omega))_n$, on "s'arrête" au terme numéro $N(\omega)$. La v.a. N est appelée un *temps d'arrêt*.

Exercice 2. Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face, avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux.
Soit $n \geq 1$. On note X_n la v.a. qui donne le nombre de Pile obtenus avec les n premiers lancers.
On note Y la v.a. qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier Face, avec $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais Face.

1. Donner l'ensemble image des v.a. X_n, et calculer leur lois de probabilités.
2. Calculer leur espérance $\mathbb{E}(X_n)$.
3. Donner l'ensemble image de la v.a. Y, et calculer $\mathbb{P}(Y = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(Y < +\infty) = 1$.
5. En déduire que l'on peut considérer Y comme une v.a. réelle, et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = Y^{-1}(\{n\})$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
7. On définit la v.a. $X_Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $X_Y(\omega) = X_{Y(\omega)}(\omega)$ si $Y(\omega) < +\infty$, et $+\infty$ sinon.
   Trouver une relation entre X_Y et Y.

Exercice 3. Un sportif tente de franchir en sautant des hauteurs successives numérotées 1, ... , n,... .
On suppose que tous les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n est de $\frac{1}{n}$.
On pose X la v.a. qui indique la dernière hauteur franchie avant le premier échec.
Quelle est le domaine d'arrivée de la v.a. X ?
Montrer que la v.a. X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Déterminer la loi de probas de X.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face (on associe 1 à Pile et 0 à Face), où on lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux, et qu'il y a probabilité p de faire Pile.
Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le résultat du lancer numéro n. Ce sont des v.a. discrètes.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
   Discuter selon la valeur de p.
2. On définit la v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ par $T(\omega) = \inf\{n \text{ t.q. } X_{n-1}(\omega) \neq X_n(\omega)\}$ si cet ensemble est non vide, et $T(\omega) = +\infty$ sinon.
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. On définit la v.a. $X_T : \Omega \to \{0, 1\}$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
   Pour quelles valeurs de p a-t-on

$$\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1, 0)) = \mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0, 1))?$$