

FEUILLE DE TD N° 7

Variables aléatoires, espérance, variance

15 AVRIL 2022

Exercice 1. Une famille a deux enfants. L'un des enfants est un garçon.

Quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?

Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

Exercice 2. A un jeu télévisé, on met 1 voiture et 2 chèvres derrière 3 portes. Le candidat doit choisir une porte, et il gagne ce qu'il y a derrière.

Un candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre alors une autre porte, qui cachait une chèvre.

Le présentateur propose au candidat de changer de porte, pour gagner ce qu'il y a derrière.

Le candidat doit-il garder sa porte, ou changer pour l'autre porte ?

Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

Exercice 3. Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux v.a. réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

• On suppose que X, Y sont intégrables.

Est-ce que XY est toujours intégrable ?

On suppose de plus que pour tous $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$, les événements $X^{-1}(\{x\})$ et $Y^{-1}(\{y\})$ sont indépendants.

Montrer alors que XY est intégrable, et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4. On lance deux dés équilibrés de façon indépendante. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.

On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de probas X . En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.

3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

On pourra utiliser l'exercice précédent.