Feuille de TD n° 8

Variables aléatoires

20 avril 2022

Exercice 1. Pour X une v.a. discrète de carré intégrable, on appelle v.a. centrée de X la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$.
Si $Var(X) \neq 0$, on appelle v.a. réduite de X la v.a. $Z = \frac{X}{Var(X)}$.
Soit $p \in]0,1[$. Soit X une v.a. de Bernouilli de paramètre p. Déterminer X^*, la v.a. centrée réduite de X.

Exercice 2. Calculer $\mathbb{P}(X < E(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\mathrm{Var}\,(X)$.

Exercice 3. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement “l'objet provient de la chaîne A“ .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle
   $\mathbb{P}\,(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 4.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$
   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ est convergente.
   Montrer que X est d'espérance finie.
   (c) Réciproquement, on suppose que X est d'espérance finie.
   Montrer alors que $\big(n\mathbb{P}(X > n)\big)_n$ tend vers 0, que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et que
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$
2. **Application :** Soient $N, n \geq 1$.
   On prend une urne avec N boules identiques au toucher, numérotées de 1 à N.
   On fait n tirages de boules avec remise. Tous les tirages sont indépendants les uns des autres.
   On note X la v.a. qui donne le plus grand numéro obtenu lors des n tirages.
   (a) Soit $1 \leq k \leq N$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$?
   En déduire la loi de probas de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$). Calculer cette limite.

(d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Montrer que si X est de carré intégrable, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$