Feuille de TD no 9

Variables aléatoires

27 avril 2022

Exercice 1. Soit $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $X_{,1}, X_2 : \Omega \to \{1, \dots, n\}$ deux v.a. qui sont indépendantes et qui ont toutes deux comme loi la mesure de probas uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.
Soit $a \in \{1, 2, \dots, n\}$. On note Y la v.a. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probas de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, et la comparer à $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle minimale ? maximale ?

---

1. On a $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
   - si $k \leq a$, $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$.
   - si $k > a$, $P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) + P((X_2 = k) \cap (X_2 > a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.

   On a bien $a \times \frac{a}{n^2} + (n - a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$.
2. Le calcul de l'espérance donne :
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$
3. Avec l'expression précédente, on voit que $\mathbb{E}(Y)$ est minimale pour $a = 0$ ou $a = n$.
   Pour la valeur maximale, on réécrit l'espérance avec des identités remarquables. On vérifie que :
$$E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2\right).$$
   Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :
   - si n est pair, c'est pour $a = n/2$.
   - si n est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

Exercice 2. Soient $n, m \geq 1$. Dans un jeu, n candidats doivent traverser un pont à m planches.
Pour chaque planche, une moitié est robuste, tandis que l'autre moitié est très fragile. Les deux moitiés sont identiques à l'oeil.
Si un candidat marche sur la mauvaise moitié d'une planche, il a perdu. S'il traverse les m planches, il a gagné.
Les candidats vont sur le pont l'un après l'autre, et le pont reste le même entre chaque candidat.
Le candidat no.2 peut donc voir où le candidat no.1 a marché, et suivre ses pas (et éviter la moitié fragile si le candidat no.1 a perdu).
On note $X_k : \Omega \to \{1, \dots, m+1\}$ la v.a. qui indique la progression du candidat numéro k. Elle vaut $1 \leq r \leq m$ si le candidat perd à la planche no.r, et $m+1$ si le candidat traverse tout le pont.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = r)$, $1 \leq r \leq m$ et $\mathbb{P}(X_1 = m+1)$.
2. Soient $1 \leq r, s \leq m+1$. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)$.
   On pourra distinguer des cas.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = s)$, pour $2 \leq s \leq m$ et $s = m+1$.
4. Soient $1 \leq r < s \leq m$. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r)$. Que trouve-t-on ?
   On pourra utiliser des probabilités conditionnelles.
5. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = m+1)$.
   En déduire $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$.
6. Trouver une expression générale de $\mathbb{P}(X_k = m+1)$, pour $k \geq 1$.
   On pourra s'aider des questions précédentes.
   Quelle méthode peut-on utiliser pour démontrer cela ?
7. Pour quelles valeurs de $k \geq 1$ a-t-on $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$?

8. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
Montrer que $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et que cette espérance converge vers 2 quand $m \to +\infty$.

On suppose que chaque choix de chaque candidat est avec une mesure de probas uniforme (proba $\frac{1}{2}$ de marcher sur la bonne moitié, et $\frac{1}{2}$ de marcher sur la mauvaise moitié).
On suppose que tous ces choix sont indépendants les uns par rapport aux autres.
On suppose que le candidat $k+1$ va toujours se souvenir des pas du candidat k.
Si le candidat k a perdu à la planche no.r, il pourra ainsi marcher sans soucis jusqu'à la planche no.r et tenter la planche no.$r+1$.
Et si le candidat k a traversé le pont, alors le candidat $k+1$ pourra lui aussi traverser le pont.

1. Pour $1 \leq r \leq m$, on a $\mathbb{P}(X_1 = r) = \frac{1}{2}^r$. On a $\mathbb{P}(X_1 = m+1) = \frac{1}{2}^m$.
2. Si $1 \leq r \leq m$ et $s \leq r$, on a $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r) = 0$.
Si $1 \leq r \leq m$ et $r < s \leq m$, on a $\mathbb{P}(X_2 = s|X_1 = r) = \frac{1}{2}^{s-r}$.
Si $1 \leq r \leq m$ et $s = m+1$ on a $\mathbb{P}(X_2 = s|X_1 = r) = \frac{1}{2}^{m-r}$.
Si $r = m+1$ et $s < r$ on a $\mathbb{P}(X_2 = s|X_1 = m+1) = 0$, et $\mathbb{P}(X_2 = m+1|X_1 = m+1) = 1$.
3. Les événements $(X_1 = r)$ forment une partition de Ω. On a donc
$\mathbb{P}(X_2 = m+1) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = m+1, X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = m+1|X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{2}^{m-r} \frac{1}{2}^{r} + 1.\frac{1}{2}^m = \frac{m+1}{2^m}$.
Pour $2 \leq s \leq m$, on a
$\mathbb{P}(X_2 = s) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = s, X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m+1} \mathbb{P}(X_2 = s|X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{2}^{s-r} \frac{1}{2}^{r} = \frac{s-1}{2^s}$.
4. On utilise la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r) = \mathbb{P}(X_3 = m+1|X_2 = s, X_1 = r)\mathbb{P}(X_2 = s|X_1 = r)\mathbb{P}(X_1 = r) = \frac{1}{2}^{m-s}\frac{1}{2}^{s-r}\frac{1}{2}^{r} = \frac{1}{2}^m$.
5. On a $\mathbb{P}(X_3 = m+1|X_2 = m+1) = 1$.
Les événements $(X_2 = m+1)$ et $(X_2 = s, X_1 = r)$ $(1 \leq r < s \leq m)$ forment une partition de Ω.
On a donc $\mathbb{P}(X_3 = m+1) = \mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = m+1) + \sum_{1 \leq r < s \leq m} \mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r) = 1.\frac{m+1}{2^m} + \sum_{1 \leq r < s \leq m} \frac{1}{2^m} = \frac{1+m+\binom{m}{2}}{2^m}$.
6. Avec les questions précédentes, on peut généraliser l'idée pour calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$ au joueur numéro k : $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2^m}(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r})$.
En effet, soit le joueur $k-1$ a traversé le pont, auquel cas $\mathbb{P}(X_k = m+1, X_{k-1} = m+1) = \mathbb{P}(X_{k-1} = m+1)$.
Soit, le joueur $k-1$ a perdu. Donc tous les joueurs $1, \dots, k-1$ ont perdu, chacun à une planche $r_1, \dots, r_{k-1}$.
Et, avec la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X_k = m+1, X_{k-1} = r_{k-1}, \dots, X_1 = r_1) = \frac{1}{2}^{m-r_{k-1}} \dots \frac{1}{2}^{r_1} = \frac{1}{2^m}$.
Il s'agit alors de compter le nombre de telles situations. Il y en a $\binom{m}{k-1}$.
Une preuve par récurrence sur k permet alors d'obtenir le résultat.
7. Avec $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2^m}(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r})$ et avec les propriétés des coefficients binomiaux (positifs, et symétriques par rapport à $\frac{m}{2}$), on en déduit que $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$ quand $k \geq \frac{m}{2}$.
Si m est impair, on a même $\mathbb{P}(X_k = m+1) = \frac{1}{2}$ pour $k = \frac{m+1}{2}$.
8. On a $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{r=1}^{m+1} r\mathbb{P}(X_1 = r) = \sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} + \frac{m+1}{2^m}$.
Par découpage et réordonnement, on a
$\sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{2^r} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k=s}^{m} \frac{1}{2^k} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}$.
$\sum_{r=1}^{m} \frac{r}{2^r} = \sum_{s=1}^{m} \frac{2}{2^s} - \frac{2}{2^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} - \frac{m}{2^m} = 2 - \frac{2}{2^m} - \frac{m}{2^m} = 2 - \frac{m+2}{2^m}$.
Donc, $\mathbb{E}(X_1) = 2 - \frac{1}{2^m}$.
On a donc bien $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et $\mathbb{E}(X_1) \to_{m \to +\infty} 2$.

Exercice 3. Soient α, $\beta \in]0,1[$. On pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(i,j) \mapsto \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j.$$

1. Vérifier que la famille $\big(g(i,j)\big)_{(i,j)}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Sur $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\right)$, on note $X, Y : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ deux v.a. discrètes définies par
$$X(i,j) = i, \ Y(i,j) = j, \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$
Donner les lois de probas de X et Y.
Retrouver des lois de probas usuelles.
3. Calculer
   (a) $\mathbb{P}(X = Y)$,
   (b) $\mathbb{P}(X > Y)$.
4. Soit $Z : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ la v.a. discrète définie par
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \ Z(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

---

1. Pour tout i, $j \in \mathbb{N}$, $\alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j \in [0,1]$ car α, $\beta \in]0,1[$ et la somme sur i puis la somme sur j existent car ce sont des séries géométriques de raison $1-\alpha$, $1-\beta \in]0,1[$ et donc la famille est sommable (à termes positifs). On obtient :

$$\alpha\beta\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j\left(\sum_{i=0}(1-\alpha)^i\right) = \alpha\beta\frac{1}{1-(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j = \frac{\beta}{1-(1-\beta)} = 1.$$

La loi $\big((i,j), g(i,j)\big)$ définit bien une loi de probabilité.

2. $\mathbb{P}(X=i) = \alpha\beta(1-\alpha)^i\sum_{j=0}^{+\infty}(1-\beta)^j = \alpha(1-\alpha)^i$, on reconnait une loi géométrique ; de même pour Y.

3. (a) $\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty}(X=Y=i)$. Par σ-additivité les événements $(X=Y=i)$ étant deux à deux disjonts :

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y=i) = \alpha\beta\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i = \frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$$

   (b) $\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\left[\bigcup\limits_{j=0}^{i-1}(X=i, y=j)\right]\right)$. Les événements sont encore deux à deux disjoints et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>Y) &= \alpha\beta\sum_{i=1}^{+\infty}\left((1-\alpha)^i\sum_{j=0}^{i-1}(1-\beta)^j\right)\\
&= \alpha\beta\sum_{i=1}^{+\infty}\left((1-\alpha)^i\frac{1-(1-\beta)^i}{1-(1-\beta)}\right)\\
&= \alpha\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha)^i - \alpha\sum_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i\\
&= 1-\alpha-\alpha(\frac{1}{\alpha+\beta-\alpha\beta}-1)\\
&= 1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta}
\end{aligned}$$

On a de même $\mathbb{P}(X<Y) = 1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$ et on verifie que

$$\mathbb{P}(X<Y)+\mathbb{P}(X=Y)+\mathbb{P}(X>y) = 1-\frac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}+1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} = 1.$$

4. Z est bornée donc intégrable. De plus $\mathbb{N}^2 = 2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}+1) \cup (2\mathbb{N}+1\times 2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1\times 2\mathbb{N}+1)$ l'union étant disjointe.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k,k'=0}^{+\infty} 1\times\alpha\beta(1-\alpha)^{2k}(1-\beta)^{2k'} + \sum_{k,k'=0}^{+\infty}(-1)\times\alpha\beta(1-\alpha)^{2k+1}(1-\beta)^{2k'+1}\\
&= \frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)^2}\times\frac{1}{(1-\beta)^2} - (1-\alpha)(1-\beta)\frac{\alpha\beta}{1-(1-\alpha)^2}\times\frac{1}{(1-\beta)^2}\\
&= \frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2-\alpha)(2-\beta)}\\
&= \frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{(2-\alpha)(2-\beta)}
\end{aligned}$$