FEUILLE DE TD Nº 9

Variables aléatoires

27 avril 2022

Exercice 1. Soit $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $X_{,1}, X_2 : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ deux v.a. qui sont indépendantes et qui ont toutes deux comme loi la mesure de probas uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Soit $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On note Y la v.a. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probas de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, et la comparer à $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle minimale ? maximale ?

Exercice 2. Soient $n, m \geq 1$. Dans un jeu, n candidats doivent traverser un pont à m planches.
Pour chaque planche, une moitié est robuste, tandis que l'autre moitié est très fragile. Les deux moitiés sont identiques à l'oeil.
Si un candidat marche sur la mauvaise moitié d'une planche, il a perdu. S'il traverse les m planches, il a gagné.
Les candidats vont sur le pont l'un après l'autre, et le pont reste le même entre chaque candidat.
Le candidat no.2 peut donc voir où le candidat no.1 a marché, et suivre ses pas (et éviter la moitié fragile si le candidat no.1 a perdu).
On note $X_k : \Omega \to \{1, \ldots, m+1\}$ la v.a. qui indique la progression du candidat numéro k. Elle vaut $1 \leq r \leq m$ si le candidat perd à la planche no.r, et $m+1$ si le candidat traverse tout le pont.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = r)$, $1 \leq r \leq m$ et $\mathbb{P}(X_1 = m+1)$.
2. Soient $1 \leq r, s \leq m+1$. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)$.
   On pourra distinguer des cas.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = s)$, pour $2 \leq s \leq m$ et $s = m+1$.
4. Soient $1 \leq r < s \leq m$. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r)$. Que trouve-t-on ?
   On pourra utiliser des probabilités conditionnelles.
5. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = m+1)$.
   En déduire $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$.
6. Trouver une expression générale de $\mathbb{P}(X_k = m+1)$, pour $k \geq 1$.
   On pourra s'aider des questions précédentes.
   Quelle méthode peut-on utiliser pour démontrer cela ?
7. Pour quelles valeurs de $k \geq 1$ a-t-on $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$?
8. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
   Montrer que $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et que cette espérance converge vers 2 quand $m \to +\infty$.

Exercice 3. Soient α, $\beta \in]0, 1[$. On pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(i, j) \mapsto \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j.$$

1. Vérifier que la famille $\big(g(i,j)\big)_{(i,j)}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Sur $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\right)$, on note $X, Y : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ deux v.a. discrètes définies par
   $$X(i, j) = i,\ Y(i, j) = j, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2.$$
   Donner les lois de probas de X et Y.
   Retrouver des lois de probas usuelles.
3. Calculer
   (a) $\mathbb{P}(X = Y)$,
   (b) $\mathbb{P}(X > Y)$.

4. Soit $Z : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ la v.a. discrète définie par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ Z(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(Z)$.