Opérateurs de composition pondérés et noyaux de reproduction sur les espaces de Hardy et de Bergman

AGNIEL Vidal

ENS de Rennes

31 Août 2016

Définition

On définit l'espace de Bergman du disque, $B^2(\mathbb{D})$, par :

$$B^2(\mathbb{D}) := Hol(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$$

Définition

On définit l'espace de Bergman du disque, $B^2(\mathbb{D})$, par :

$$B^2(\mathbb{D}) := Hol(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$$

Définition

On définit l'espace de Hardy du disque, $H^2(\mathbb{D})$, par :

$$H^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D}) \text{ t.q. } f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n.z^n \text{ avec } \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty\}$$

Théorème

L'espace de Bergman du disque est un espace de Hilbert pour $\langle f, g\rangle_{B^2(\mathbb{D})} := \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{D})}$.
L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour $\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} := \sum_{n\geq 0} \overline{a_n}.b_n$,
avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n.z^n$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n.z^n$.

Théorème

L'espace de Bergman du disque est un espace de Hilbert pour
$\langle f, g\rangle_{B^2(\mathbb{D})} := \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{D})}$.
L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour
$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} := \sum_{n\geq 0} \overline{a_n}.b_n$,
avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n.z^n$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n.z^n$.

Théorème

On peut aussi définir l'espace de Hardy par :
$H^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D})$ t.q. f admet un prolongement L^2 sur $\partial\mathbb{D}\}$
On a de plus : $\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi}.\langle f, g\rangle_{L^2(\partial\mathbb{D})}$.

On a les inégalités suivantes :

Proposition

$$\forall f \in B^2(\mathbb{D}), |f(z)| \leq \frac{1}{\pi d(z;\mathbb{D}^C)^2} \|f\|_{B^2(\mathbb{D})}$$

$$\forall f \in H^2(\mathbb{D}), |f(z)| \leq \frac{1}{d(z;\mathbb{D}^C)} \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$$

On a les inégalités suivantes :

Proposition

$\forall f \in B^2(\mathbb{D}), |f(z)| \leq \frac{1}{\pi d(z;\mathbb{D}^C)^2} \|f\|_{B^2(\mathbb{D})}$
$\forall f \in H^2(\mathbb{D}), |f(z)| \leq \frac{1}{d(z;\mathbb{D}^C)} \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$

Les opérateurs d'évaluation $f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ sont donc continus.

Proposition

Le théorème de Riesz donne ainsi $\forall z \in \mathbb{D}$ l'existence de $k_z^{B^2(\mathbb{D})} \in B^2(\mathbb{D})$ et $k_z^{H^2(\mathbb{D})} \in H^2(\mathbb{D})$ tels que :
$\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f(z) = \langle k_z^{B^2(\mathbb{D})}, f \rangle_{B^2(\mathbb{D})}$
$\forall f \in H^2(\mathbb{D}), f(z) = \langle k_z^{H^2(\mathbb{D})}, f \rangle_{H^2(\mathbb{D})}$

Définition

On définit ainsi $\forall z, w \in \mathbb{D}$: $K_{B^2(\mathbb{D})}(z,w) := \overline{k_z^{B^2(\mathbb{D})}(w)}$ et $K_{H^2(\mathbb{D})}(z,w) := \overline{k_z^{H^2(\mathbb{D})}(w)}$.
Ces fonctions sont appelées noyaux de reproduction de $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$.

Définition

On définit ainsi $\forall z, w \in \mathbb{D}$: $K_{B^2(\mathbb{D})}(z, w) := \overline{k_z^{B^2(\mathbb{D})}(w)}$ et $K_{H^2(\mathbb{D})}(z, w) := \overline{k_z^{H^2(\mathbb{D})}(w)}$.
Ces fonctions sont appelées noyaux de reproduction de $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$.

Plus généralement, la définition d'un noyau de reproduction est la suivante :

Définition

Soit X un ensemble, et H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{C}$.
Une fonction $K : X \times X \to \mathbb{C}$ est un noyau de reproduction de H si et seulement si :
- $\forall z \in X,\ k_z := \overline{K(z, .)} \in H$
- $\forall z \in X,\ \forall f \in H,\ f(z) = \langle k_z, f \rangle_H$.

Soit X un ensemble. Soit H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui possède un noyau de reproduction K_H. On a les propriétés suivantes :

Soit X un ensemble. Soit H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui possède un noyau de reproduction K_H. On a les propriétés suivantes :

Proposition

K_H est unique.

Soit X un ensemble. Soit H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui possède un noyau de reproduction K_H. On a les propriétés suivantes :

Proposition

K_H est unique.

Proposition

On a : $K_H(z,w) = \overline{K_H(w,z)}$, $\forall z, w \in X$. Ainsi, $K_H(z,z) \geq 0$.
Et pour δ_z l'opérateur d'évaluation en z, $K_H(z,z) = \|\delta_z\|$.

Soit X un ensemble. Soit H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui possède un noyau de reproduction K_H. On a les propriétés suivantes :

Proposition

K_H est unique.

Proposition

On a : $K_H(z,w) = \overline{K_H(w,z)}$, $\forall z, w \in X$. Ainsi, $K_H(z,z) \geq 0$. Et pour δ_z l'opérateur d'évaluation en z, $K_H(z,z) = \|\delta_z\|$.

Proposition

Si H est séparable, soit $\{\psi_n\}_n$ une b.o.n de H. Alors $\forall z, w \in X$,

$$K_H(z,w) = \sum_{n\geq 0} \psi_n(z).\overline{\psi_n(w)}$$

Proposition

K_H est une fonction noyau sur X :
$\forall n > 0$, $\forall \{x_1, ..., x_n\} \subset X$, $((K_H(x_i, x_j)_{i,j})$ est auto-adjointe positive.

Cette propriété de "fonction noyau" permet de généraliser les noyaux de reproduction. Le théorème suivant donne un lien fort entre ces deux éléments.

Proposition

K_H est une fonction noyau sur X :
$\forall n > 0$, $\forall \{x_1, ..., x_n\} \subset X$, $((K_H(x_i, x_j)_{i,j})$ est auto-adjointe positive.

Cette propriété de "fonction noyau" permet de généraliser les noyaux de reproduction. Le théorème suivant donne un lien fort entre ces deux éléments.

Théorème

Soit $K : X \times X \mapsto \mathbb{C}$ une fonction noyau sur X. Alors il existe un unique espace de Hilbert H de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ tel que K est le noyau de reproduction de H.

Une b.o.n de $H^2(\mathbb{D})$ est $\{z^n\}_{n\geq 0}$.
Ainsi, $K_{H^2(\mathbb{D})}(z,w) = \sum_{n\geq 0} z^n.\overline{w}^n = \frac{1}{1-\overline{w}.z}$

Une b.o.n de $H^2(\mathbb{D})$ est $\{z^n\}_{n\geq 0}$.
Ainsi, $K_{H^2(\mathbb{D})}(z,w) = \sum_{n\geq 0} z^n.\overline{w}^n = \frac{1}{1-\overline{w}.z}$
Une b.o.n de $B^2(\mathbb{D})$ est $\{z^n.\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\}_{n\geq 0}$.
Ainsi, $K_{H^2(\mathbb{D})}(z,w) = \sum_{n\geq 0} z^n.\overline{w}^n.\frac{\pi}{n+1} = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{(1-\overline{w}.z)^2}$
Les expressions sont obtenues assez simplement et donnent entre autres la norme des opérateurs d'évaluation δ_z.

Pour continuer, généralisons les espaces de Hardy et Bergman.

Définition

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$. On définit :
$B^2(\Omega) := Hol(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ l'espace de Bergman de Ω
$H^2(\Omega) := \{f \in Hol(\Omega)$ t.q. f a un prolongement L^2 sur $\partial\Omega\}$ l'espace de Hardy de Ω.

Pour continuer, généralisons les espaces de Hardy et Bergman.

Définition

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$. On définit :
$B^2(\Omega) := Hol(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ l'espace de Bergman de Ω
$H^2(\Omega) := \{f \in Hol(\Omega)$ t.q. f a un prolongement L^2 sur $\partial\Omega\}$ l'espace de Hardy de Ω.

Théorème

Soit $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ un biholomorphisme. Alors
$H^2(\Omega) = \{f \in Hol(\Omega)$ t.q. $\lim_{r \to 1^-}(\int_{\psi(B(0,r))} |f(z)|^2 |dz|) < \infty\}$.

Cette seconde caractérisation est plus pratique pour les calculs, tandis que la première caractérisation est plus visuelle.

Remarque

Essayer de définir $B^2(\mathbb{C})$ et $H^2(\mathbb{C})$ de façon similaire donne $\{0\}$, ce qui n'est pas intéressant.

Remarque

Essayer de définir $B^2(\mathbb{C})$ et $H^2(\mathbb{C})$ de façon similaire donne $\{0\}$, ce qui n'est pas intéressant.

Théorème

$B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

Remarque

Essayer de définir $B^2(\mathbb{C})$ et $H^2(\mathbb{C})$ de façon similaire donne $\{0\}$, ce qui n'est pas intéressant.

Théorème

$B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

En obtenant une inégalité similaire à celle trouvée pour $\mathbb{D}$, les opérateurs d'évaluation δ_z sont tous continus sur ces deux espaces, et le théorème de Riesz nous donne :

Proposition

$B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert à noyau de reproduction.

Théorème

Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ un biholomorphisme. Alors

U : $\begin{array}{ccc} B^2(\Omega) & \to & B^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\psi' \end{array}$ et V : $\begin{array}{ccc} H^2(\Omega) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\sqrt{\psi'} \end{array}$ sont des isométries.

Théorème

Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ un biholomorphisme. Alors $U : \begin{array}{ccc} B^2(\Omega) & \to & B^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\psi' \end{array}$ et $V : \begin{array}{ccc} H^2(\Omega) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\sqrt{\psi'} \end{array}$ sont des isométries.

Grâce à ces isométries, on obtient :

Théorème

$$K_{B^2(\Omega)}(z; w) = \psi'(z).K_{B^2(\mathbb{D})}(\psi(z); \psi(w)).\overline{\psi'(w)}$$
$$K_{H^2(\Omega)}(z; w) = \sqrt{\psi'(z)}.K_{H^2(\mathbb{D})}(\psi(z); \psi(w)).\overline{\sqrt{\psi'(w)}}$$

Théorème

Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{D}$ un biholomorphisme. Alors U : $\begin{array}{ccc} B^2(\Omega) & \to & B^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\psi' \end{array}$ et V : $\begin{array}{ccc} H^2(\Omega) & \to & H^2(\mathbb{D}) \\ f & & (f \circ \psi).\sqrt{\psi'} \end{array}$ sont des isométries.

Grâce à ces isométries, on obtient :

Théorème

$$K_{B^2(\Omega)}(z; w) = \psi'(z).K_{B^2(\mathbb{D})}(\psi(z); \psi(w)).\overline{\psi'(w)}$$
$$K_{H^2(\Omega)}(z; w) = \sqrt{\psi'(z)}.K_{H^2(\mathbb{D})}(\psi(z); \psi(w)).\overline{\sqrt{\psi'(w)}}$$

Ce théorème couplé au calcul de $K_{B^2(\mathbb{D})}$ et $K_{H^2(\mathbb{D})}$ nous donne :

Théorème

$$K_{B^2(\Omega)}(z; w) = \frac{1}{\pi}.(K_{H^2(\Omega)}(z; w))^2.$$

Les deux derniers théorèmes permettent de rapidement calculer les noyaux de reproduction de $H^2(\Omega)$ et $B^2(\Omega)$ à partir de ceux de $H^2(\mathbb{D})$ et $B^2(\mathbb{D})$.

Les deux derniers théorèmes permettent de rapidement calculer les noyaux de reproduction de $H^2(\Omega)$ et $B^2(\Omega)$ à partir de ceux de $H^2(\mathbb{D})$ et $B^2(\mathbb{D})$.
- Soit $\Omega_1 := \{z \text{ tq } Re(z) > 0\}$ un demi-plan.
Alors $\psi_1 : z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ est un biholomorphisme de Ω_1 vers $\mathbb{D}$.
On obtient ainsi : $K_{H^2(\Omega_1)}(z, w) = \frac{1}{z+\overline{w}}$.
Donc $K_{H^2(\Omega_1)}(z, z) = \frac{1}{2.Re(z)}$.

Les deux derniers théorèmes permettent de rapidement calculer les noyaux de reproduction de $H^2(\Omega)$ et $B^2(\Omega)$ à partir de ceux de $H^2(\mathbb{D})$ et $B^2(\mathbb{D})$.
- Soit $\Omega_1 := \{z \text{ tq } Re(z) > 0\}$ un demi-plan.
Alors $\psi_1 : z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ est un biholomorphisme de Ω_1 vers $\mathbb{D}$.
On obtient ainsi : $K_{H^2(\Omega_1)}(z,w) = \frac{1}{z+\overline{w}}$.
Donc $K_{H^2(\Omega_1)}(z,z) = \frac{1}{2.Re(z)}$.
- Soit $\Omega_2 := \{z \text{ tq } |Im(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ une bande de largeur π.
Alors $\psi_2 : z \mapsto exp(z)$ est un biholomorphisme de Ω_2 vers Ω_1,
et $\psi_1 \circ \psi_2(z) = \tanh(\frac{z}{2})$.
On obtient ainsi : $K_{H^2(\Omega_2)}(z,w) = \frac{1}{\tanh(\frac{z+\overline{w}}{2})}$.
Donc $K_{H^2(\Omega_1)}(z,z) = \frac{1}{\cos(Im(z))}$.

Revenons maintenant sur le disque pour aborder les opérateurs de composition.
Pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ donnée, on cherche déjà à avoir $C_\varphi : f \mapsto f \circ \phi$ bien défini sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$.
On montre dans un premier temps que φ doit nécessairement être holomorphe.

Revenons maintenant sur le disque pour aborder les opérateurs de composition.
Pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ donnée, on cherche déjà à avoir $C_\varphi : f \mapsto f \circ \phi$ bien défini sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$.
On montre dans un premier temps que φ doit nécessairement être holomorphe.

Remarque

Un théorème sur les espaces de Hilbert à noyaux de reproduction nous dit que C_φ bien défini $\Rightarrow$ C_φ continu. Il n'est cependant pas utilisé ici car on va directement trouver une majoration de $\|C_\varphi\|$.

Revenons maintenant sur le disque pour aborder les opérateurs de composition.
Pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ donnée, on cherche déjà à avoir $C_\varphi : f \mapsto f \circ \phi$ bien défini sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$.
On montre dans un premier temps que φ doit nécessairement être holomorphe.

Remarque

Un théorème sur les espaces de Hilbert à noyaux de reproduction nous dit que C_φ bien défini $\Rightarrow$ C_φ continu. Il n'est cependant pas utilisé ici car on va directement trouver une majoration de $\|C_\varphi\|$.

Théorème de subordination de Littlewood

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe telle que $\varphi(0) = 0$.
Alors C_φ est continu sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$, et $\|C_\varphi\| \leq 1$.

Un théorème plus général en découle :

Théorème

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe.
Alors C_φ est continu sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ et de norme $\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$.

Un théorème plus général en découle :

Théorème

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe.
Alors C_φ est continu sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ et de norme $\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$.

Ce résultat ne s'étend pas à tout Ω ouvert simplement connexe car les isométries liant $H^2(\mathbb{D})$ à $H^2(\Omega)$ et $B^2(\mathbb{D})$ à $B^2(\Omega)$ envoient un opérateur de composition C_φ sur un opérateur de composition pondéré $M_w \circ C_\phi$, où M_w est l'opérateur de multiplication par w. M_w dépend fortement du biholomorphisme $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ choisi, qui dépend fortement de la forme de Ω, et peut ainsi ne pas être continu voire pas bien défini.

Il existe toutefois certains critères impliquant la bonne définition, continuité, et compacité de C_φ.
L'un de ces critères est le suivant :

Il existe toutefois certains critères impliquant la bonne définition, continuité, et compacité de C_φ.
L'un de ces critères est le suivant :

Critère de Hilbert-Schmidt

Soit $\varphi : \Omega \to \Omega$ holomorphe.
Si $\iint_\Omega K_{B^2(\Omega)}(\varphi(z), \varphi(z))|dz| < \infty$, alors C_φ est compact sur $B^2(\Omega)$.
Si $\int_{\partial\Omega} K_{H^2(\Omega)}(\varphi(z), \varphi(z))|dz| < \infty$, alors C_φ est compact sur $H^2(\Omega)$.

L'ensemble des C_φ pour lesquels φ vérifie le critère de Hilbert-Schmidt est un idéal inclus dans l'ensemble des opérateurs compacts.

Un lemme rend plus pratique l'utilisation d'un tel critère :

Lemme

Soient $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphes, avec $Im(f) \subset Im(g)$ et g injective.
Si C_g est compact sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$, alors C_f l'est aussi.
Si C_f n'est pas compact sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$, alors C_g aussi.

Un lemme rend plus pratique l'utilisation d'un tel critère :

Lemme

Soient $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphes, avec $Im(f) \subset Im(g)$ et g injective.
Si C_g est compact sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$, alors C_f l'est aussi.
Si C_f n'est pas compact sur $B^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{D})$, alors C_g aussi.

La fonction g étant holomorphe injective, c'est un biholomorphisme $\mathbb{D} \to Im(g)$. Ainsi, la forme de $Im(\varphi)$ joue un rôle majeur dans les propriétés de C_φ.

Dans le cas de l'espace de Hardy (resp Bergman), on remarque que si $d(Im(\varphi), \partial\Omega) > 0$ et que $|\partial\Omega| < \infty$ (resp $|\Omega| < \infty$), alors C_φ est de type Hilbert-Schmidt, donc compact.
A contrario, si $\mu(\varphi(\partial\Omega) \cap \partial\Omega) > 0$, C_φ n'est pas compact sur $B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$.

Dans le cas de l'espace de Hardy (resp Bergman), on remarque que si $d(Im(\varphi), \partial\Omega) > 0$ et que $|\partial\Omega| < \infty$ (resp $|\Omega| < \infty$), alors C_φ est de type Hilbert-Schmidt, donc compact.
A contrario, si $\mu(\varphi(\partial\Omega) \cap \partial\Omega) > 0$, C_φ n'est pas compact sur $B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$.
Dans le cas du disque, si $Im(\varphi)$ contient un disque tangent au cercle unité, alors C_φ n'est pas compact sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$.

Dans le cas de l'espace de Hardy (resp Bergman), on remarque que si $d(Im(\varphi), \partial\Omega) > 0$ et que $|\partial\Omega| < \infty$ (resp $|\Omega| < \infty$), alors C_φ est de type Hilbert-Schmidt, donc compact.
A contrario, si $\mu(\varphi(\partial\Omega) \cap \partial\Omega) > 0$, C_φ n'est pas compact sur $B^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$.
Dans le cas du disque, si $Im(\varphi)$ contient un disque tangent au cercle unité, alors C_φ n'est pas compact sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$.
On montre aussi que si $Im(\varphi)$ est incluse dans un polygone inscrit dans $\mathbb{D}$ ou dans une lentille inscrite dans $\mathbb{D}$, alors C_φ est de type Hilbert-Schmidt sur $H^2(\mathbb{D})$.

Pour la bande $\Omega_2 = \{z \text{ tq } |Im(z)| < \frac{\pi}{2}\}$, on a
$K_{H^2(\Omega_2)}(\varphi(z), \varphi(z)) = \frac{1}{\cos(Im(\varphi(z)))} > 1$, et $|\partial\Omega_2| = \infty$.
Ainsi, pour tout $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_2$ holomorphe,
$\int_{\partial\Omega} K_{H^2(\Omega)}(\varphi(z), \varphi(z))|dz| = \infty$.

Pour la bande $\Omega_2 = \{z \text{ tq } |Im(z)| < \frac{\pi}{2}\}$, on a $K_{H^2(\Omega_2)}(\varphi(z), \varphi(z)) = \frac{1}{\cos(Im(\varphi(z)))} > 1$, et $|\partial\Omega_2| = \infty$.
Ainsi, pour tout $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_2$ holomorphe, $\int_{\partial\Omega} K_{H^2(\Omega)}(\varphi(z), \varphi(z))|dz| = \infty$.
Il n'y a donc aucun opérateur de composition de type Hilbert-Schmidt sur $H^2(\Omega_2)$.
On montre le même résultat pour $B^2(\Omega_2)$, $H^2(\Omega_1)$, $B^2(\Omega_1)$.

Ces résultats calculables tombent sous la coupe d'un théorème plus général :

Théorème

$B^2(\Omega)$ possède des opérateurs de composition compacts si et seulement si $|\Omega| < \infty$.
$H^2(\Omega)$ possède des opérateurs de composition compacts si et seulement si $|\partial\Omega| < \infty$.

Joel H. SHAPIRO.
Lectures on composition operators and analytic function theory
Lectures, 1998.

Vern I. PAULSEN.
An introduction to the theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces.
Lectures, 2009.

Peter L. DUREN, Alexander SCHUSTER.
Bergman spaces.
American mathematical society, 2004.

Albrecht PIETSCH.
Nuclear locally convex space.
Springer, 1972.

Joel H. SHAPIRO.
Hardy spaces that support no compact composition operators.
Lectures, 2003.

Ceci est la fin de cette présentation.
Je vous remercie de votre présence.