COMPLÉTUDE DE LA RÉSOLUTION

David Nour Raffali p267.

Idée

Intuitivement la complétude d'un système de preuve assure que tout ce qui est vrai, vrai dans les modèles, admet une preuve.
En général il s'agit de MQ si tout modèle de Σ satisfait φ ($\Sigma \models \varphi$) alors on peut prouver que φ est csq de Σ ($\Sigma \vdash \varphi$).

Ici, en résolution, si $\Sigma \models \varphi$ on sait que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ n'a pas de modèle, et donc la mise sous forme de clause E non plus, plus précisém^t $\mathcal{S}(E)$ n'a pas de modèle. (où $\mathcal{S}$ désigne les significat°).
On dira seulement que E est contradictoire.
Il faut s'assurer que la résolution le montre, c-à-d que E se dérive en vide en résolution, c-à-d que E est inconsistant.

Pté

Soit E un ensemble de clauses.
Si E est contradictoire, alors E est inconsistant.

complétude

Preuve : On le montre par la contraposée, c-à-d qu'on suppose E consistant (ne se dérivant pas en $\emptyset$ en résolution), et on va MQ E n'est pas contradictoire en exhibant un modèle, dit de Herbrand.

On suppose que le langage sur lequel sont écrites les formules contient au moins un symbole de constante, afin d'assurer que l'ensemble des termes clos soit non vide.

Puisque E est consistant on peut considérer l'ensemble Z des ensembles de clauses contenant E et consistants, qui est alors non vide.

$$Z = \{F \text{ ens. de clauses} \mid E \subset F,\ F \text{ consistant}\} \neq \emptyset \text{ car } E \in Z.$$

Montrons que Z est un ensemble inductif pour l'inclusion, c-à-d que chaque chaîne admet un majorant.
Pour une chaîne S de Z on considère U l'union de tous ses élm^t.
Néc $E \subset U$. Reste à vérifier que U est consistant. Par l'absurde si U est inconsistant on peut dériver la clause vide à partir des clauses de U, à partir d'1 nombre fini de clauses de U m̃. Or cela implique qu'elles sont toutes dans un m̃ élm^t $S_0 \in S$.

[⚠ mais ici car S est une chaîne et U une union croissante]

Mais cela est absurde car $S_0 \in S \subset Z$ est consistant.
On en déduit que U est bien consistant, et donc $U \in Z$ et Z est inductif.

Cela nous permet d'utiliser le lemme de Zorn, qui assure l'existence de E_0 un élément maximal de Z.

Utilisons cette maximalité : considérons A une formule atomique close.
Si $A \notin E_0$ et $\neg A \notin E_0$, la maximalité de E_0 assure que $E_0 \cup \{A\}$ et $E_0 \cup \{\neg A\}$ sont inconsistants, autrement dit on peut dériver la clause vide à partir de $E_0 \cup \{\neg A\}$ et de $E_0 \cup \{A\}$.
Par le lemme technique qui suit cela implique l'existence de A' ☆ et A'' filtrant resp. A et $\neg A$, qu'on peut dériver à partir de E_0.
A' et $\overline{A''}$ étant unifiables (en A), on pourrait dériver $\emptyset$ à partir de E_0 : ABSURDE !

Pour passer de deux termes qui en filtre un m̂ troisième, à deux termes unifiables on utilise l'hypothèse implicite que les variables sont ≠ d'une clause à l'autre.

+ Cf lemme

On est donc assuré que chaque formule close A vérifie $A \in E_0$ ou $\neg A \in E_0$

On construit maintenant le modèle de Herbrand $\mathcal{M}$

→ de domaine M = l'ensemble des termes clos.
→ pour c symbole de cst. $c^{\mathcal{M}}$ est $c \in M$
→ pour f ——— f° d'arité k. $f^{\mathcal{M}}$ est $\left(\begin{array}{ccc} M^k & \longrightarrow & M \\ \vec{t} & \longmapsto & \underbrace{f(\vec{t})}_{\text{le terme qui s'écrit } f(t)} \end{array}\right)$
→ pour R ——— relation k-aire on pose
$$R^{\mathcal{M}} = \{(t_1, \dots, t_k) \in M^k \mid \underbrace{R(t_1, \dots, t_k)}_{\text{formule atomique close}} \in E_0\}$$

Montrons que $\mathcal{M}$ est modèle de E_0 (de $\mathcal{S}(E_0)$) et donc de E ($\mathcal{S}(E)$).
$\mathcal{S}(E_0)$ s'écrit comme une conjonction de clauses.
Soit C l'une de des clauses, on l'écrit $\{A_i \mid i \in [1..p]\} \cup \{\neg B_j \mid j \in [1..q]\}$.
Alors $\mathcal{S}(C) = \forall x_1 — \forall x_n . A_1 \vee A_2 \dots \vee A_p \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_q$.
Si $\mathcal{M} \not\models \mathcal{S}(C)$, il existe $(t_i | i \in [1..n]) \in M^n$ tel qu'avec la signature $\sigma : x_i \mapsto t_i$, on ait $\mathcal{M}[\sigma] \not\models A_1 \vee \dots \vee A_p \vee \neg B_1 \dots \vee \neg B_q$.
En particulier pour $i \in [1..p]$ $\mathcal{M}[\sigma] \not\models A_i$
$j \in [1..q]$ $\mathcal{M}[\sigma] \not\models \neg B_j$ soit $\mathcal{M}[\sigma] \models B_j$.

Par construction cela signifie que $\forall i \in [1..p]$ $A_i[\sigma] \notin E_0$
$\forall j \in [1..q]$ $B_j[\sigma] \in E_0$.

(En effet A_i étant atomique on peut l'écrire $R(x_{i_1}, \dots x_{i_k})$.
Alors par définition : $\mathcal{M}[\sigma] \models A_i$ ssi $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})[\sigma] \in R^{\mathcal{M}}$
ssi $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}) \in R^{\mathcal{M}}$
ssi $\underbrace{R(t_{i_1}, \dots t_{i_k})}_{= A_i[\sigma]} \in E_0$

Mais alors E_0 est inconsistant, en effet on a la preuve :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A_1, A_2 \ldots, A_p, \neg B_1, \neg B_2 \ldots \neg B_q \qquad \neg A_1[\sigma]}{A_2[\sigma] \; A_p[\tau] \; \neg B_1[\sigma] \cdots \neg B_q[\sigma]}\,\mathrm{res}(\sigma)}{\neg B_1[\sigma] \cdots \neg B_q[\sigma]}\,\mathrm{res}(id)^{p-1}}{\emptyset}\,\mathrm{res}(id)^q$$

$\mathrm{res}(id)^{p-1}$ en utilisant successivement $\neg A_2[\sigma], \neg A_3[\sigma] \cdots \neg A_p[\sigma]$

$\mathrm{res}(id)^q$ en utilisant succ. $B_1[\sigma], B_2[\sigma] \cdots B_q[\sigma]$.

C'est absurde ! Donc $\mathcal{M} \models \mathcal{S}(C)$.

Ceci étant pour toute clause C de E_0, $\mathcal{M} \models \mathcal{S}(E_0)$.

Enfin comme $E \subset E_0$ $\mathcal{M} \models \mathcal{S}(E)$, donc E admet bien un modèle, et n'est pas contradictoire.

lemme Soit E un ensemble de clauses. Soit L un littéral clos. Si $\emptyset$ se dérive à partir de $E \cup \{L\}$ (ie $E \cup \{L\} \vdash_{res} \emptyset$) alors il existe un littéral L' qui filtre $\bar{L}$ tq $E \vdash_{res} L'$ ou $E \vdash_{res} \emptyset$.

On va montrer par induction que pour toute clause C, et tout littéral clos L, Si $E \cup \{\{L\}\} \vdash C$ et $C \neq \{L\}$ alors

→ soit il existe C' une clause, et τ une substitution, telles que $\begin{cases} E \vdash C' \\ C'[\tau] = C \end{cases}$

(on notera $P_a(C';\tau;C)$)

→ soit il existe C' une clause et K un littéral, ainsi que τ une substitu°

tels que $\begin{cases} E \vdash C', K \\ C'[\tau] = C \\ K'[\tau] = \bar{L} \end{cases}$ (on notera $P_b(C';K;\tau;C)$)

Cela assure bien le résultat pour $C = \emptyset$.

Avant de nous lancer dans la preuve précisons un point délicat passé sous silence dans la preuve précédente.

Puisque les variables apparaissant dans les sont quantifiées universellem^t devant chaque clause, le nom de celles-ci importe peu. Plus précisemment on peut supposer qu'une variable n'apparait pas dans 2 clauses distinctes, quitte à faire un renommage [ie une substitution d'une variable en une autre] qui transforme la significa° de cette clause en une signification équivalente.

Cette hypothèse permettra de combiner des substitution qui affectent des clauses ≠, qui en quelque sorte ont à support disjoint.

Précédemment on avait ($\forall$ ✱) A' filtre A et A'' filtre $\neg A$.
On en a rapidement – abusivem^t – déduit que A' et $\overline{A''}$ étaient unifiables.
En réalité on sait qu'il existe τ' et τ'' telles que $A'[\tau'] = A$
$A''[\tau''] = \neg A$ de $\overline{A''}[\tau''] = A$.
Or pour unifiable il faudrait que ce soit
un σ commun qui ~~unifie~~ A' en A et A'' en A.
En supposant que les variables apparaissant ds A' et ds A'' soient disjointes
on peut poser $\sigma = \left(\begin{array}{l} \mathcal{V} \\ x \mapsto \begin{cases} \tau'(x) & \text{si } x \text{ apparaît ds } A' \\ \tau''(x) & \text{si } x \text{ apparaît ds } A'' \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right)$

On a ainsi $A'[\sigma] = A'[\tau'] = A = A''[\tau''] = A''[\sigma]$
donc A' et A'' sont bien unifiables en A.
On notera – notation inventée – $\tau' \oplus \tau''$ pour σ, voire
$\tau'_{/A'} \oplus \tau''_{/A''}$ si la première écriture est ambiguë.

Ceci étant dit commençons l'induction.

→ le cas de base est celui où la preuve se fait en 0 étape.
comme par un axiome bien qu'on n'ait pas explicité d'axiomes
en résolution. C'est le cas où $E \cup \{\{L\}\} \vdash C$ car $C \in E \cup \{\{L\}\}$.
Puisqu'on a supposé $C \neq \{L\}$ on a néc $C \in E$, et alors $E \vdash C$. ok.

→ Si la dernière étape de la preuve est une résolution faisant intervenir $\{L\}$
et s'écrit $\dfrac{C_1, L_1 \qquad L}{C}$ res $[\sigma]$ (avec $L_1[\sigma] = \overline{L}$, $C_1[\sigma] = C$)
on a alors par hypothèse d'induc° sur $E \cup \{\{L\}\} \vdash C_1, L_1$ deux cas possibles

– S'il existe C_1', L_1' et τ_1 tq $Pa(C_1', L_1'; \tau_1; C_1, L_1)$
On pose $C' = C_1'$; $K = L_1'$ et $\tau = \sigma \circ \tau_1$ car $\begin{cases} E \vdash C', K = C_1', L_1' \\ C'[\tau] = (C_1'[\tau_1])[\sigma] = C_1[\sigma] = C \\ K[\tau] = (L_1'[\tau_1])[\sigma] = L_1[\sigma] = \overline{L} \end{cases}$
aut. dit car on a bien $Pb(C'; K; \tau; C)$

– S'il existe C_1', L_1', K_1 et τ_1 tq $Pb(C_1', L_1'; K_1; \tau_1; C_1, L_1)$
On peut alors appliquer la contraction $\dfrac{C_1', L_1', K_1}{C, \overline{L}}$ cont $[\sigma \circ \tau_1]$
car $\begin{cases} L_1'[\sigma \circ \tau_1] = (L_1'[\tau_1])[\sigma] = L_1[\sigma] = \overline{L} \\ K_1[\sigma \circ \tau_1] = (K_1[\tau_1])[\sigma] = \overline{L}[\sigma] = \overline{L} \quad \text{car } \overline{L} \text{ clos donc insensible aux substitu}^\circ \\ C_1'[\sigma \circ \tau_1] = (C_1'[\tau_1])[\sigma] = C_1[\sigma] = C \end{cases}$

Donc $E \vdash C, \overline{L}$, on a bien $Pb(C; \overline{L}; id; C)$