DÉCIDER SI $L_G(S)$ EST VIDE

Aut(94) p 80.

Soit $G = (\Sigma, \Gamma, R)$ une grammaire algébrique

On pose $\underline{U_0} = \Sigma$

$\underline{U_{n+1}} = U_n \cup \{X \in \Gamma \mid \exists \omega \in U_n^*, (X \to \omega) \in R\}$

puis $\underline{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Pté 1. $U \cap \Gamma = \{S \in \Gamma \mid L_G(S) \neq \emptyset\}$

2. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'1 certain rang.

↳ **Cor** On peut calculer si $L_G(S) = \emptyset$ en $O(|G|)$

"LA VACUITÉ D'UN LANGAGE EST DÉCIDABLE"

Preuve. 1 | Si $S \in \Gamma$ engendre un langage non vide, il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $S \xrightarrow{*} w$.

Si la longueur de cette dérivation est n alors $S \in U_n$.

En effet si l'on écrit

$$S \to \alpha_1 S_1 \beta_1 \to \alpha_2 S_2 \beta_2 \;- - - - - \alpha_{n-1} S_{n-1} \beta_{n-1} \to \alpha_n \beta_n = w$$

où les α_i et β_i sont des mots sur $(\Sigma \cup \Gamma)$

les $S_i \in \Gamma$ et sont les non terminaux dérivés à chaque étape.

Puisque $\alpha_n \beta_n = w \in \Sigma^* = U_0^*$ et que S_{n-1} se dérive en une étape en un facteur de $\alpha_n \beta_n$, il existe une règle $S_{n-1} \to v$ où $v \in \Sigma^* = U_0^*$ donc $S_{n-1} \in U_1$.

α_{n-1} et β_{n-1} étants inchangés sont des facteurs de w, donc écrits sur $\Sigma^* = U_0^*$. Donc $\alpha_{n-1} S_{n-1} U_{n-1} \in (U_1)^*$.

En itérant ce raisonnem^t on MQ $\forall i \in [1..n]$ $\alpha_{n-i} S_{n-i} U_{n-i} \in U_i^*$

en particulier $\alpha_1 S_1 \beta_1 \in U_{n-1}$ donc $S \in U_n$.

Donc $\underline{S \in U \cap \Gamma}$ D'où l'inclusion $\supseteq$

Réciproquem^t | si $S \in \Gamma \cap U$ Comme $S \in U$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $S \in U_n$.

L'appartenance de S à U_n est justifiée par 1 règle $S \to \omega_1$ où $\omega_1 \in U_{n-1}^*$.

On a donc $S \to \omega_1$.

Si $\omega_1 \in \Sigma^*$ $\omega_1 \in L_G(S)$ donc $L_G(S) \neq \emptyset$.

Sinon on écrit $w_1 = \alpha_1 S_1 \beta_1$ où S_1 est le non-terminal le plus à gauche dans w_1.

En itérant ce raisonnement soit on a "tout de suite" $L_G(S) \neq \emptyset$, soit on a l'existence de $w_i \in (U_{n-i})^*$ tel que $S \xrightarrow{i} w_i$.

En particulier $w_0 \in U_0^*$ et $S \xrightarrow{n} w_0$ donc $w_0 \in \Sigma^*$ et $w_0 \in L_G(S)$.

Donc $\underline{L_G(S) \neq \emptyset}$. D'où l'inclusion $\subseteq$.

Par double inclusion on a prouvé 1.

<u>Preuve 2.</u> Si $U_n = U_{n+1}$, alors $\forall k \geq n$ $U_k = U_n$ et $U = U_n$.

En effet si $U_{n+1} = U_n$,

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= U_{n+1} \cup \{X \in \Gamma \mid \exists w \in (U_{n+1})^*, (X \to w) \in R\} \\ &= U_n \cup \{ \text{—} \mid \text{——} \ U_n^* \ \text{——} \} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

donc en itérant on en déduit que la suite est stationnaire.

Par ailleurs on sait que la suite (U_n) est $\nearrow$ pour l'inclusion. On en déduit qu'elle est st $\nearrow$ puis stationnaire (éventuelle à l'∞). Comme elle est bornée par $\Sigma \cup \Gamma$ qui est fini, elle arrête de croître après un nbre fini d'étapes, on a alors atteint U.

exo

$$G_R = \begin{array}{l} S_1 \to aS_2 \mid bS_2S_3 \mid abS_2S_1 \mid S_3S_4 \\ S_2 \to aS_3 \mid bS_2 \mid a \\ S_3 \to aS_3 \mid bS_3 \\ S_4 \to aS_2 \mid bS_1 \mid a \end{array} \longrightarrow \quad G'_R = \begin{array}{l} S_1 \to aS_2 \mid abS_2S_1 \\ S_2 \to bS_2 \mid a \\ S_4 \to aS_2 \mid bS_1 \mid a \end{array}$$

grammaire préréduite en enlevant les n.t de langage eng. vide

$U_0 = \{a, b\}$

$U_1 = \{a, b, S_2, S_4\}$ car $S_2 \to a$ et $S_4 \to a$

$U_2 = \{a, b, S_2, S_4, S_1\}$ car $S_1 \to aS_2$

$U_3 = \{\text{————}\}$ car aucune règle d'origine S_3 n'est écrite sur $(U_2)^*$.

Donc $\Gamma' = \{S_1, S_2, S_4\}$ est l'ens. des variables engendrant un langage non vide.