RÉSOLUTION

Cours de D. Pichardie puis David, Nour Raffali p264.

Lemmes

Sur un langage $\mathcal{L}$ fixé.
S et Σ deux ens. de $\mathcal{L}$-ennoncés (ie formule closes) du 1er ordre.
φ un $\mathcal{L}$-ennoncé du 1er ordre.

$\boxed{S \vdash \bot \text{ ssi } S \models \bot \text{ ssi } S \text{ n'a pas de modèle}}$ $\star_1$

$\boxed{\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ n'a pas de modèles ssi } \Sigma \models \varphi \text{ ssi } \Sigma \vdash \varphi}$ $\star_2$

Preuve 1) si $S \vdash \bot$ alors $S \models \bot$ par correction de $\vdash$.
$S \models \bot$ signifie qu'un modèle de S vérifie nécessairement $\bot$, or un modèle ne peut vérifier $\bot$. Donc S n'a pas de modèle.

Réc si S n'a pas de modèle, l'ensemble de ses modèles vérifie ce qu'on veut, on peut en particulier affirmer que tous les modèles de S vérifient $\bot$, ce qui signifie $S \models \bot$.
Par complétude $S \vdash \bot$.

2) Supposons que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ n'a pas de modèles.
Considérons $\mathcal{M}$ un modèle de Σ. Nécessairem^t $\mathcal{M} \models \varphi$ ou $\mathcal{M} \models \neg\varphi$
(NB : comme φ est close, ainsi que les formules de Σ on n'a pas besoin de préciser une assigna°, de parler de structure signée. Ce qu'on dit est vrai pour tte assigna° dans $\mathcal{M}$)

Si $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ alors $\mathcal{M}$ est un modèle de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. IMP par hyp.
Donc néc $\mathcal{M} \models \varphi$. Cela étant pour tt modèle de .., on a bien $\Sigma \models \varphi$ puis par complétude $\Sigma \vdash \varphi$.

Réciproquem^t si $\Sigma \vdash \varphi$ et par correc° $\Sigma \models \varphi$, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ne peut avoir de modèle. En effet si $\mathcal{M}$ était un modèle de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, ce serait en particulier un modèle de Σ, or $\Sigma \models \varphi$ implique que $\mathcal{M} \models \varphi$. On aurait $\mathcal{M} \models \varphi$ et $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. IMP !

Idée

On veut montrer que $\Sigma \vdash \varphi$ (ou $\Sigma \models \varphi$).

D'après $\star_1$ et $\star_2$ on peut se ramener à MQ $S = \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$

Dans un premier temps on se ramène à $\tilde{S}$ un ensemble de clauses (implicitem^t universellem^t quantifiées en ttes les variables) tel que $\tilde{S} \vdash \bot$ ssi $S \vdash \bot$.

Dans un second temps on montrera que $\tilde{S} \vdash \bot$ grâce à l'unification.

esc

On veut MQ $\boxed{\overbrace{\exists x(Px \to \forall y\, Py) \; ; \; \forall x\,(Px \vee Qx)}^{\Sigma} \models \overbrace{\exists x, ((\neg Qx) \to \forall y\, Py)}^{\varphi}}$

(ici $\mathcal{L}$ contient au moins deux symboles de rela°
→ P rela° (prédicat) unaire
→ Q rela° (———) unaire.)

Par la mise sous forme de clauses de S

$$S = \{\exists x\, Px \to \forall y\, Py \; ; \; \forall x\,(Px \vee Qx) \; ; \; \neg(\exists x, ((\neg Qx) \to \forall y\, Py))\}$$

cst   unaire

on est ramené à MQ $\tilde{S} \vdash \bot$ où $\tilde{S}$ est écrit sur $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{c, f\}$, avec

$$\tilde{S} = \{\neg Pc \vee Py \; ; \; Px \vee Qx \; ; \; \neg Qx \; ; \; \neg P f(x)\}$$

(cf mise sous forme de clauses.)

NB : Le $\tilde{S}$ indiqué ici est l'ensemble des clauses, avec lesquelles on va travailler. Mais quand on écrit $\tilde{S} \vdash \bot$ il faut comprendre $\tilde{S}$ comme l'ens des clôtures par quantifica° universelles des clauses de $\tilde{S}$, c-à-d comme $\{\forall x \forall y\, \neg Pc \vee Py \; ; \; \forall x \forall y\, Px \vee Qx, \forall y \forall x\, \neg Qx \; ; \; \forall x \forall y\, \neg P f(x)\}$

On a "l'arbre d'unifica°" suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\neg \underline{Pc} \vee Py \arrow[dr] & & \underline{Px} \vee Qx \arrow[dl, "x:=c"'] & & \\
& Py \vee \underline{Qc} \arrow[dr] & & \neg \underline{Qx} \arrow[dl, "x:=c"'] & \\
& & Py \arrow[dr] & & \neg P f(x) \arrow[dl, "y:=f(x)"'] \\
& & & \bot &
\end{tikzcd}$$

Donc $\tilde{S} \vdash \bot$ donc $S \vdash \bot$ donc $\Sigma \models \varphi$.

Pour démontrer la complétude et la correction de la méthode de résolution on doit d'abord formaliser un peu.

Déf * Un littéral est une formule atomique ou sa négation

Si l est une formule atomique, on notera $\overline{l} = \neg l$

Si l est la néga° d'1 formule atomique, ie $l = \neg \varphi$, on notera $\overline{l} = \varphi$

Ainsi dans les deux cas le conjugué $\overline{l}$ est aussi un litéral.

* Une clause est un ensemble fini de littéraux.

Comme pour les ens. de formules on notera par une virgule l'union et l'on ommettra les accolades

ex L_1, L_2, L_3 pour $\{L_1, L_2, L_3\}$

C, L_2 pour $C \cup \{L_2\}$

Rq On voudra parfois distinguer les litteraux positifs (ie sans négation) des litéraux négatifs d'une clause C.

On les répartira alors en C^+ et C^-, ou Δ et Γ.

Pourquoi Δ et Γ plutôt que Γ et Δ?

$\neg A \vee B \equiv A \to B$

Rappel

On pense la clause $C = \{Px, \neg Qz, \neg Qy\}$ comme une disjonction c-à-d comme $Px \vee \neg Qz \vee \neg Qy$ qui équivaut à $Qz \wedge Qy \to Px$

Donc les clauses qui se retrouvent à gauche sont les négatives, et sont comme pour les séquents "en conjection", dans Γ, alors que celles à droites sont les positives, et comme pour les séquents en disjonction dans Δ.