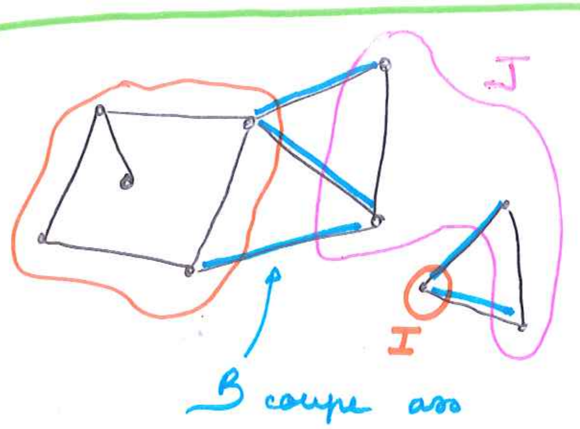
UNE CARACTÉRISATION DES COUPES

Soit $G=(V,E)$ un graphe non orienté

Rappel $B \subset E$ est une coupe de G
$\iff$ il existe une partition (I,J) de V telle que $B = \{\{u,v\} \in E \mid u \in I \text{ et } v \in J\}$
$\underset{\text{notation}}{:=} I \times J \cap E$

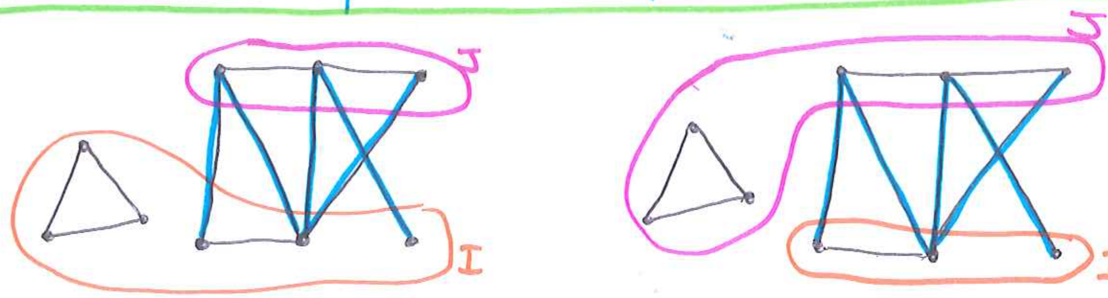
ex



ici B est la coupe associée à la partition I, J

Rmq Attention une coupe n'est pas associée de manière unique à une partition

ex



Pté Soit $B \subset E$
B est une coupe de G $\iff$ tout cycle de G a un nombre pair d'arêtes de B

$\boxed{\Rightarrow}$ Si B est une coupe de G on peut considérer (U, W) une partition de V telle que $B = U \times W \cap E$.

Si $B = \emptyset$, tout cycle de G intersecte B en 0 arêtes et 0 est pair.

Sinon on est assuré que $\begin{cases} U \neq \emptyset \\ W \neq \emptyset \end{cases}$.

Considérons un cycle γ de G, dont on note $(\gamma_i)_{i \in [1..n]}$ les sommets, et dont les arêtes sont donc $(\gamma_i, \gamma_{i+1})_{i \in [1..n]}$ avec la convention $\gamma_{n+1} = \gamma_1$. Quitte à parcourir le cycle on a une suite croissante d'indices $(i_k)_{k \in [1..p]}$ telle que

$$B \cap \gamma = \left\{ \{\gamma_{i_k}, \gamma_{i_k+1}\} \mid k \in [1..p] \right\}$$

Par déf des arêtes de B on a ✿ $\begin{cases} \forall k, & \gamma_{i_k} \in U \Rightarrow \gamma_{i_k+1} \in W \\ \forall k, & \gamma_{i_k} \in W \Rightarrow \gamma_{i_k+1} \in U \end{cases}$

Puisqu'on a pris toutes les arêtes et dans l'ordre, on a aussi ☀ $\begin{cases} \forall k, \gamma_{i_k+1} \in U \Rightarrow \gamma_{i_{k+1}} \in U \\ \forall k, \gamma_{i_k+1} \in W \Rightarrow \gamma_{i_{k+1}} \in W \end{cases}$ avec la convention $\underline{\gamma_{i_{p+1}} = \gamma_{i_1}}$

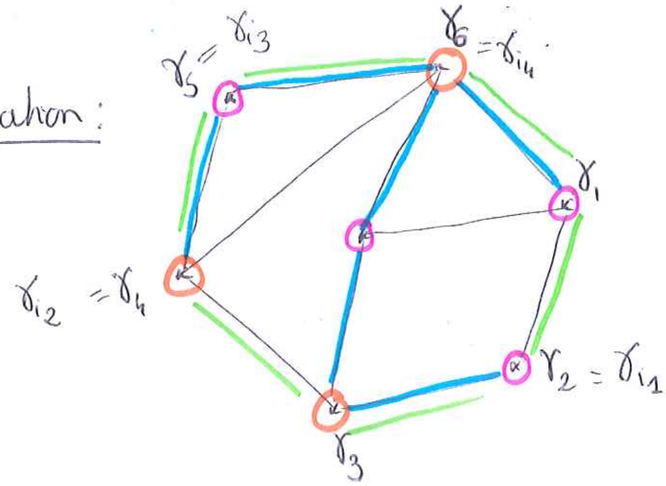
On en déduit * $\begin{cases} \forall k \in [1..p-1], \gamma_{i_k} \in U \Rightarrow \gamma_{i_{k+1}} \in W \Rightarrow \gamma_{i_{k+2}} \in U. \\ \text{———————} \ W \ \text{———————} \ U \ \text{———————} \ W. \end{cases}$

En particulier si p est impair, $p-1$ est pair donc

$$\begin{cases} \gamma_{i_1} \in U \overset{*\text{itère}}{\Longrightarrow} \gamma_{i_p} = \gamma_{i_{1+(p-1)}} \in U \overset{✿}{\Longrightarrow} \gamma_{i_p+1} \in W \overset{☀}{\Longrightarrow} \gamma_{i_1} \in W \\ \text{—} \ W \ \text{———————} \ W \ \text{———————} \ U \ \text{———————} \ U \end{cases} \quad \underline{\text{ABS}}$$

Donc nécessairement p pair CQFD.

illustration :



— B correspondant à U, W

$$B \cap \gamma = \begin{cases} \{\gamma_2, \gamma_3\} = \{\gamma_{i_1}, \gamma_{i_1+1}\}; \\ \{\gamma_4, \gamma_5\} = \{\gamma_{i_2}, \gamma_{i_2+1}\}; \\ \{\gamma_5, \gamma_6\} = \{\gamma_{i_3}, \gamma_{i_3+1}\}; \\ \{\gamma_6, \gamma_1\} = \{\gamma_{i_4}, \gamma_{i_4+1}\}; \end{cases}$$

⇐ Supposons réciproquement que B est un ensemble d'arête vérifiant qu'aucun cycle de G ne l'intersecte en un nombre impair d'arêtes.

Pour montrer qu'il s'agit bien d'une coupe on doit revenir à la définition et exhiber une partition.

Dans un premier temps on suppose G $\boxed{\text{connexe}}$.

→ Si $B = \emptyset$, la partition triviale $V = V \sqcup \emptyset$ convient, B est une coupe

→ Sinon, considérons $(a,b) \in B$.
On considère la relation $\sim$ définie sur V par
$x \sim y$ ssi il existe un chemin de x à y
ayant un nombre pair d'arêtes ds B "de B-longueur paire"

On pose alors $U = \{x \in V \mid a \sim x\}$
$W = \{x \in V \mid b \sim x\}$

1) $U \cap W = \emptyset$. Remarquons que $x \sim y \overset{*}{\iff}$ tous les chemins de x à y ds G ont un nbre pair d'arêtes ds B.

En effet si on avait à la fois un chemin de B-longueur paire et un de B-longueur impaire reliant x et y, on peut, en les concaténant, construire un cycle de B-longueur impaire (pair + impair = impair !)
Or c'est impossible par hypothèse.

Donc si $x \in U$, il existe γ chemin de a à x de B-longueur paire
alors $b \longrightarrow a \xrightarrow{\gamma} x$ est un chemin de b à x de B-longueur impaire (puisque $(a,b) \in B$), donc $x \not\sim b$, $x \notin W$.

2) $U \cup W = V$. Soit $x \in V$. Par connexité de G il existe un chemin γ de a à x.
Si γ est de B-longueur paire, alors $x \in U$
Sinon alors $b \longrightarrow a \xrightarrow{\gamma} x$ est de B-longueur paire donc $x \in V$.
Donc néc $x \in U \cup W$.

3) $B \subset E \cap U \times W$ Si $(x,y) \in B$. Supposons, quitte à échanger x et y d'après 2), que $x \in U$, et considérons γ un chemin de a à x.
Alors $b \longrightarrow a \xrightarrow{\gamma} x \longrightarrow y$ est aussi de B-longueur paire ($1 + |\gamma|_B + 1$), donc $y \in W$. Donc $(x,y) \in E \cap U \times W$.

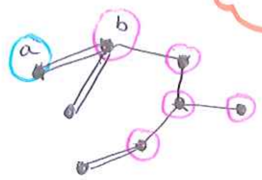
4) $E \cap U \times W \subset B$ On considère $(x,y) \in E$ tq $x \in U$ et $y \in W$.
À nouveau on note γ un chemin de a à x de B-longueur paire
Si $(x,y) \notin B$ alors $b \longrightarrow a \xrightarrow{\gamma} x \longrightarrow y$ est de B-longueur imp.
donc (*) $y \not\sim b$ soit $y \notin W$ ABSURDE. Donc $(x,y) \in B$.

Ainsi (U, W) est une partition de V correspondant à la coupe B.

Apparté : Comment avoir l'idée des chemins de B-longueur paire ?

= $\in B$
— $\in E\setminus B$

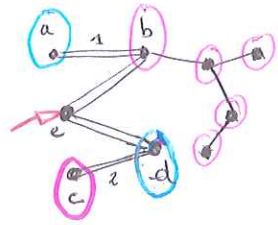
1ère idée Si $(a,b) \in B$ avec $a \in U$
alors tous les x reliés à b dans $(V, E\setminus B)$ sont dans W



A chaque étape on va donc clore U et W par la relation $\sim_1$ de connexité dans $(V, E\setminus B)$

MAIS En fait il y a aussi des contraintes / de l'information qui se propage(nt) dans les arêtes de B

ex

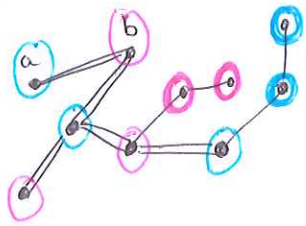


Dans l'exemple ci-contre, après avoir traité (a,b) on pourrait être amené à traiter (c,d).
Alors on ne sait ni si $c\in U$ ou $c\in W$
ni si $d\in U$ ou $d \in W$.

On se dit que c'est indifférent et on choisit (arbitrairem^t) $\begin{cases} c\in W \\ d\in U \end{cases}$

Cela introduit malheureusem^t une incompatibilité en e !

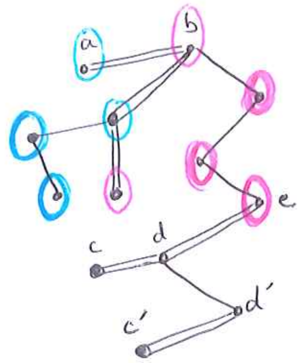
2ème idée Si $(a,b)\in B$ avec $a\in U$
alors tous les sommets reliés à a dans (V,B) par un nombre pair d'arêtes sont dans U, à l'inverse ceux reliés par un nombre impair sont dans W.



A chaque étape on va donc clore U et W d'abord par la relation $\sim_2$ de connexité paire dans (V,B) [qui est bien définie grâce à l'hypothèse sur les intersec° des cycles de G avec B]

puis par $\sim_1$ (en gras sur le dessin).

MAIS Cela ne suffit pas à tenir compte d'une info/contrainte qui se propage par $E\setminus B$ d'abord, puis par B, puis par $E\setminus B$ à nouveau.



Ci-contre, si on traite (c,d) ou (c',d') on risque d'introduire une incompatibilité en choisissant arbitrairement, parce qu'on ne tient pas compte de l'info arrivée en e.

On se dit qu'il faudrait "repasser une couche de $\sim_2$", et même de $\sim_1$ pour (c',d') !

3ème idée On pourrait introduire $\sim$ définie par $x\sim y$ ssi $x\sim_1 y$ ou $x\sim_2 y$
puis considérer sa clôture transitive $\sim^*$ (définie par $x\sim^* y$ ssi $x\sim y$ ou s'il existe $(z_i)_{i\in[1,n]}$ tq $x\sim z_1\sim z_2 \dots \sim z_n\sim y$)
et clore, à chaque étape U et W par $\sim^*$.

On se rend alors compte que $\sim^*$ est justement la relation de connexité dans E de B-longueur paire, ie
$x\sim^* y$ ssi il existe un chemin de x à y dans G qui a un nombre pair d'arêtes dans B.

On remarque aussi qu'une seule étape traite toute la composante connexe.

Traitons maintenant le cas de G $\boxed{\text{non connexe}}$

Pour se ramener à ce qu'on a fait dans le cas connexe on considère les composantes connexes de G qu'on note $G_i = (V_i; E_i)$ pour $i \in [1..p]$.

On peut noter ici que $(V_i)_{i\in[1..p]}$ est une partition de V $\star_1$
$(E_i)_{i\in[1..p]}$ ——— E. $\star_2$

Alors en notant $(B_i)_{i\in[1..p]} = (B \cap E_i)_{i\in[1..p]}$ on a une partition de B $\star_3$

Pour $i \in [1..p]$ on considère le graphe G_i (connexe par construction) et le sous ensemble d'arêtes de G_i B_i, qui vérifie l'hypothèse sur les cycles.

D'après le cas connexe il existe alors $(U_i; W_i)$ tq $\begin{cases} (U_i, W_i) \text{ partitionne } V_i & ☼_1 \\ \text{la coupe correspondante est exactement } B_i & ☼_2 \end{cases}$

On pose alors $\underline{U = \biguplus_{i\in[1..p]} U_i}$ et $\underline{W = \biguplus_{i\in[1..p]} W_i}$.

D'une part on a alors une partition de V en (U, W)

En effet $V = \biguplus_{i\in[1..p]} V_i$ $(\star_1)$

$$= \biguplus_{i\in[1..p]} (U_i \uplus W_i) \quad ☼_1$$

$$= \left(\biguplus_{i\in[1..p]} U_i\right) \uplus \left(\biguplus_{i\in[1..p]} W_i\right)$$

$$= U \uplus W$$

D'autre part la coupe associée est exactement B

En effet $B = \biguplus_{i\in[1..p]} B_i$ $(\star_3)$

$$= \biguplus_{i\in[1..p]} E_i \cap U_i \times W_i \quad ☼_2$$

(où $U_i \times W_i$ est encore une notation pour $\{\{u,w\} \mid u \in U_i, w \in W_i\}$)

$$= \biguplus_{i\in[1..p]} E \cap (U_i \times W_i)$$

$\subset$ facile car $E_i \subset E$
$\supset$ car $U_i \times W_i \subset V_i \times V_i$ et $V_i \times V_i \cap E = E_i$ par déf. des comp. connexes.

$$= E \cap \left(\bigcup_{i\in[1..p]} U_i \times W_i\right)$$

$$= E \cap \left(\bigcup_{i\in[1..p]} U_i \times \bigcup_{i\in[1..p]} W_i\right)$$

⚠ A priori $\bigcup_{i\in[1..p]} U_i \times W_i \neq \bigcup_{i\in[1..p]} U_i \times \bigcup_{i\in[1..p]} W_i$

En effet à gauche on considère les paires $\{u,w\}$ où $u \in U_i$ et $w \in W_i$ pour le même indice i, alors qu'à droite on considère aussi ceux où $u \in U_i$ et $w \in W_j$ avec $i \neq j$.
En fait il y a inclusion $(\subset)$ et l'inclusion réciproque vient quand on intersecte avec E, puisque dans E il n'y a pas d'arêtes de la forme $U_i \times W_j$ puisque par déf des comp. connexes il n'y en a pas de la forme $V_i \times V_j$! (si $i \neq j$)

$$= E \cap U \times W.$$

Ce qui conclut $\boxed{\Leftarrow}$: un ensemble d'arête qui intersecte les cycles en un nombre pair d'arête est bien une coupe.