Projection sur un convexe fermé non vide

cf Hirsch-Lacombe p91.

103.0 Rappel Soit C est une partie d'un $\mathbb{K}$-EV où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

C est convexe $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in C^2, \forall \lambda \in]0,1[\ \lambda x+(1-\lambda)y \in C$

Soit H un espace de Hilbert

- H est un $\mathbb{K}$-EV où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ → on peut parler de convexité
- H est muni d'un produit scalaire, noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et de la norme $\|\cdot\| = \langle \cdot | \cdot \rangle$
- H est complet pour la norme $\| \ \|$.

⚠ La dimension ici est possiblement infinie

Le produit scalaire peut être sur $\mathbb{C}$. Penser aux "Re"...

103.1 lemme **Identité du parallélogramme**

$$\boxed{\forall (x,y)\in H^2, \ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)}$$

Preuve : Soit $(x,y)\in H^2$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \underbrace{\langle x|y\rangle + \overline{\langle x|y\rangle}}_{=2\,\mathrm{Re}(\langle x|y\rangle)} + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle x|y\rangle) + \|y\|^2$$

Donc $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

103.2 Théorème de projection

Si C est un convexe fermé non vide de H alors tout $x\in H$ admet une unique projection p sur C caractérisée par $p\in C$ et $\forall c\in C$ $\mathrm{Re}\langle p-c | p-x\rangle \leq 0$

Preuve - 1) MONTRER L'EXISTENCE AVEC UNE SUITE MINIMISANTE

On note d_C la distance à la partie C, par définition $d_C(x) = \inf_{c\in C} \|x-c\|$

On peut alors considérer $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante c-à-d dans C telle que $\|x-c_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d_C(x)$

A partir d'un certain rang cette suite est dans $B(x, d_C(x)+1) =: B$.

Si on est en dimension finie on peut dire que B est compacte et donc extraire de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $c \in \overline{C} = C$, ainsi c serait une projection.
En dimension infinie on n'a pas la compacité si facilem^t, plutôt que de chercher à extraire on va RQ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, mais cela utilisera néc. la convexité.
(En effet si C n'est pas cvx on peut avoir 2 projec° et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui alterne de l'une à l'autre sans ê de Cauchy).
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe, puisque $\|c_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\searrow} d_C(x)$, $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $\|c_n - x\| \leq d_C(x) + \varepsilon$
Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $p \geq q \geq N$. On a alors

$$\|c_p - c_q\|^2 = \|(c_p - x) + (x - c_q)\|^2 \quad \text{id. du } /\!\!/$$
$$= 2\left(\|c_p - x\|^2 + \|c_q - x\|^2\right) - \|c_p - x - x + c_q\|^2$$
$$\leq 2 \times 2\,(d_C(x) + \varepsilon)^2 - \Big(2\,\underbrace{\|\underbrace{\tfrac{c_p + c_q}{2}}_{\substack{\in C \\ \text{par cvxité}}} - x\|}_{\geq d_C(x)}\Big)^2$$
$$\leq \cancel{4\,d_C(x)^2} + 4\varepsilon^2 + 8\varepsilon d_C(x) - \cancel{4\,d_C(x)^2}$$
$$\leq \varepsilon\,(4\varepsilon + 8\,d_C(x)) \quad \text{(tend vers 0 quand } \varepsilon \to 0\text{)}.$$

Donc $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Par complétude elle converge vers $c \in \overline{C} = C$ car C est fermé.
De plus $\|x - c\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x - c_n\| = d_C(x)$.
Donc c est bien une projection de x sur C.

2) MONTRER L'UNICITÉ AVEC L'IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

Supposons que p_1 et p_2 sont deux projections de x sur C.
On a $\|p_1 - p_2\|^2 = \|p_1 - x + x - p_2\|^2$ } id du $/\!\!/$

$$= 2\,\|p_1 - x\|^2 + 2\,\|p_2 - x\|^2 - \|2\,\tfrac{p_1 - p_2}{2} - 2x\|^2$$
$$= 4\,d_C(x)^2 - 4\,\underbrace{\|\underbrace{\tfrac{p_1 - p_2}{2}}_{\in C} - x\|^2}_{\geq d_C(x)^2}$$
$$\leq 0$$

Donc $\|p_1 - p_2\|^2 = 0$ donc $p_1 = p_2$ d'où l'unicité

3) MONTRER LA CARACTÉRISATION

Notons p la projection de x sur C. Soit $c \in C$. $\forall t \in]0,1[$ $tc + (1-t)p$ soit $t(c-p) + p \in C$ par convexité.
Donc $\forall t \in]0,1[$ $\cancel{\|x-p\|^2} \leq \|x - (t(c-p) + p)\|^2 = \|(x-p) - t(c-p)\|^2 = \cancel{\|x-p\|^2} + \|t(c-p)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\underbrace{\langle x-p \mid t(c-p)\rangle}_{\langle p-x \mid t(p-c)\rangle})$
donc $2\cancel{t}\,\mathrm{Re}\,(\langle p-x \mid p-c\rangle) \leq t^{\cancel{2}}\,\|c-p\|^2$ donc en faisant $t \to 0$ on a bien $\mathrm{Re}(\langle p-x \mid p-c\rangle) \leq 0$
et $p \in C$ par déf. Réciproquement si $p \in C$ et $\forall c \in C$ $\mathrm{Re}\,(\langle p-x \mid p-c\rangle) \leq 0$ on a alors
$\forall c \in C$ $\|x-c\|^2 = \|x-p+p-c\|^2 = \|x-p\|^2 + \underbrace{\|p-c\|^2}_{\geq 0} + 2\,\underbrace{\mathrm{Re}\,(\langle x-p \mid p-c\rangle)}_{\geq 0} \geq \|x-p\|^2$, donc $d_C(x) = \|x-p\|$.
On a bien la caractérisation.

103.1

103.3 **Pté** Soit C un convexe fermé non vide de H.
Notons P_C la projection sur C, ie l'application de H dans C qui à un point de H associe son projeté sur C.
Alors P_C est 1-lipschitzienne.

__Preuve__ Soit $(x,y) \in H^2$. La caractérisation des projections $P_C(y)$ on a
$Re(\langle P_C(x) - P_C(y) \mid P_C(x) - x \rangle) \leq 0$ car $P_C(y) \in C$
et $Re(\langle P_C(y) - P_C(x) \mid P_C(y) - y \rangle) \leq 0$ car $P_C(x) \in C$
soit $Re(\langle P_C(x) - P_C(y) \mid y - P_C(y) \rangle) \leq 0$.
Donc en sommant on obtient $Re(\langle P_C(x) - P_C(y) \mid P_C(x) - P_C(y) + y - x \rangle) \leq 0$
donc
$$\begin{aligned} \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 &\leq Re(\langle P_C(x) - P_C(y) \mid -y + x \rangle) \\ &\leq |\langle P_C(x) - P_C(y) \mid x - y \rangle| \\ &\leq \|P_C(x) - P_C(y)\| \times \|x - y\|. \end{aligned}$$
par Cauchy-Schwarz

Donc $\|P_C(x) - P_C(y)\| = 0$ ou $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$.
D'où P_C est 1-lipschitzienne