11

Caractérisation de la continuité des applications linéaires et multilinéaires.

11.1 **Pté** Soient E et F deux EVN. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

(a) u est continue en 0_E $\Leftrightarrow$ u est bornée sur $\overline{\mathcal{B}}(0_E, 1)$ (b)

$\Leftrightarrow$ u est bornée sur $\mathcal{S}(0_E, 1)$ (c)

$\Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ (d)

$\Leftrightarrow$ u est k-lipschitzienne (pour le m̂ k) (e)

$\Leftrightarrow$ u est uniformement continue (f)

$\Leftrightarrow$ u est continue (g)

Preuve On le montre par implications circulaires.

a ⇒ b Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}(0_E, \delta)$, $u(x) \in \mathcal{B}(0_F, \varepsilon)$.
Soit $x \in \overline{\mathcal{B}}(0_E, 1)$. $\|\delta x\|_E = \delta\|x\|_E \leq \delta$ donc $\delta x \in \mathcal{B}(0_E, \delta)$ ainsi $u(\delta x) \in \mathcal{B}(0_F, \varepsilon)$ soit $\|u(\delta x)\|_F \leq \varepsilon$ or $\|u(\delta x)\|_F = \|\delta u(x)\|_F = \delta\|u(x)\|_F$
d'où $\|u(x)\|_F \leq \varepsilon/\delta$ qui est indép de x. Donc u est bornée sur $\overline{\mathcal{B}}(0_E, 1)$

b ⇒ c clair car $\mathcal{S}(0_E, 1) \subset \overline{\mathcal{B}}(0_E, 1)$

c ⇒ d. Soit k un majorant de u sur $\mathcal{S}(0_E, 1)$.
Soit $x \in E$. Si $x = 0$ $\|u(x)\|_F = 0 \leq k \times 0 = k\|x\|_E$.
Sinon $\frac{x}{\|x\|_E} \in \mathcal{S}(0_E, 1)$ donc $\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \leq k$
donc $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

d ⇒ e Pour $(x,y) \in E^2$ $\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$
donc u est bien k-lpz.

e ⇒ f. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $\delta = \varepsilon/k$ (En supposant $k \neq 0$ car pour $k = 0$ $u = 0$ est néc unif continue)
Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $\|x-y\|_E \leq \delta$.
Alors $\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq k\|x-y\| \leq k\delta = \varepsilon$.
D'où l'uniforme continuité

f ⇒ g par définition de l'unif. continuité
g ⇒ a par déf. de continuité.

11.2 **Pté** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_i)_{i\in[1..N]}$ une famille de N EVN dont on notera $\| \|_{E_i}$ les normes resp.

On munit $E = \prod_{i=1}^{N} E_i$ de la norme max i.e $\| \|_E = \left(\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^+ \\ (x_i)_{i\in[1..N]} \to \max_{i\in[1..N]} \|x_i\|_{E_i} \end{array} \right)$

Soit F un EVN. Soit u une application N-linéaire de E dans F.

(a) u est continue en 0_E $\Leftrightarrow$ u est bornée sur $\bar{B}(0_E, 1)$ (b)

$\Leftrightarrow$ u est bornée sur $S(0_E, 1)$ (c)

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall x \in E$ $\|u(x)\|_F \leq k \times \prod_{i=1}^{N} \|x_i\|_{E_i}$ (d)

$\Leftrightarrow$ $\forall R \in \mathbb{R}^{+*}$ u est unif. continue sur $\bar{B}(0_E, R)$ (e)

$\Leftrightarrow$ u est continue (f)

Preuve : On montre les équivalences par implications cycliques.

$a \Rightarrow b$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall x \in B(0_E, \delta)$, $u(x) \in B(0_F, \varepsilon)$ ie $\|u(x)\|_F \leq \varepsilon$.

Soit $x \in \bar{B}(0_E, 1)$. $\|\delta^N u(x)\|_F = \|u((\delta x_i)_{i\in[1..N]})\|_F$ par N-linéarité de u

$\leq \varepsilon$ car $\forall i \in [1..N]$ $\|\delta x_i\|_{E_i} = \delta \|x_i\|_{E_i} \leq \delta \times \|x\|_E \leq \delta \times 1$.

donc $\|(\delta x_i)_{i\in[1..N]}\|_E \leq \delta$.

donc $\|u(x)\|_F \leq \varepsilon/\delta^N$.

Ainsi ε/δ^N borne u sur $\bar{B}(0_E, 1)$

$b \Rightarrow c$ Evident car $S(0_E, 1) \subset \bar{B}(0_E, 1)$

$c \Rightarrow d$. Soit k un majorant de $\|u\|_F$ sur $S(0_E, 1)$. Soit $x \in E$.

→ S'il existe $i \in [1..N]$ tel que $x_i = 0$, alors $u(x) = 0$ par N linéarité, on a bien $\|u(x)\|_F \leq k \times 0$.

→ Sinon $\frac{\|u(x)\|_F}{\prod_{i=1}^{N} \|x_i\|_{E_i}} = \left\| u\left(\left(\frac{x_i}{\|x_i\|_{E_i}} \right)_{i\in[1..N]} \right) \right\|_F \leq k$ car $\left\| \left(\frac{x_i}{\|x_i\|_{E_i}} \right)_{i\in[1..N]} \right\|_E = \max_{i\in[1..N]} \frac{\|x_i\|_{E_i}}{\|x_i\|_{E_i}} = 1$

Donc $\|u(x)\|_F \leq k \prod_{i=1}^{N} \|x_i\|_{E_i}$.

$d \Rightarrow e$ Soit $R \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $(x, y) \in \bar{B}(0_E, R)^2 = \left(\prod_{i=1}^{N} \bar{B}(0_{E_i}, R) \right)^2$ par déf de $\| \|_E$.

$\|u(x) - u(y)\|_F \leq \|u(x) - u(y_1, x_2 \ldots x_N)\|_F + \|u(y_1, x_2 \ldots x_N) - u(y)\|_F$

$\leq \|u(x_1 - y_1, x_2 \ldots x_N)\|_F + \|u(y_1, x_2 \ldots x_N) - u(y_1, y_2, x_3 \ldots x_N)\|_F + \|u(y_1, y_2, x_3 \ldots x_N) - u(y)\|_F$

$\leq \underbrace{k \times \|x_1 - y_1\| \times \prod_{i=2}^{m} \|x_i\|}_{\leq R} + \underbrace{\|u(y_1, x_2 - y_2, x_3 \ldots x_N)\|_F}_{\leq k \times \|x_2 - y_2\| \times \|y_1\| \times \prod_{i=3}^{m} \|x_i\|} + \| \text{———} \|_F$

... en itérant le procédé

$\leq \sum_{j=1}^{N} k \times \|x_j - y_j\| \times R^{N-1} \leq N \times k \times R^{N-1} \times \underbrace{\max_{j\in[1..N]} \|x_j - y_j\|}_{= \|x - y\|_E}$

Donc u est $N \times k \times R^{N-1}$ lpz sur $\bar{B}(0_E, R)$, elle y est donc unif. continue

$e \Rightarrow f$ Pour la continuité en x, il suffit de choisir $R > \|x\|_E$ et d'utiliser la continuité sur $\bar{B}(0, R)$.

$f \Rightarrow a$ par définition.