Quelques propriétés de fonctions $\mathcal{L}^1$.

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré

III.1 **Pté** Soit $f\in \mathcal{M}es((X,\mathcal{A},\mu),(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})))$.
Si $f\in\mathcal{L}^1(X)$, alors f est finie μ-pp.

Preuve • Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $A_n=\{x\in X \mid |f(x)|\geq n\}$.
Puisqu'on peut aussi l'écrire $A_n=f^{-1}([-\infty,-n]\cup[n,+\infty])$,
A_n est assurément un mesurable (ie $A_n\in\mathcal{A}$).

• Pour $x\in X$ et $n\in\mathbb{N}$, $|f(x)|\geq n \Rightarrow |f(x)|\geq n-1$, donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, on a alors $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)$, or $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ c'est justement l'ensemble qui nous intéresse : celui des points de valeur infinie.

• $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mu(A_n)=\int_X 1_{A_n}\,d\mu = \int_X 1_{\{|f|\geq n\}}\,d\mu=\int_X \underbrace{1_{\{\frac{|f|}{n}\geq 1\}}}_{\leq |f|/n}\,d\mu$

$$\leq \frac{1}{n} \underbrace{\int_X|f|\,d\mu}_{\in\mathbb{R} \text{ car } f\in\mathcal{L}^1}$$

Donc $\mu(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. D'où $\mu(\{x \mid f(x)=\pm\infty\})=0$ □

III.2 **Pté** Soient $f\in\mathcal{M}es((X,\mathcal{A},\mu),(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})))$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.
Si $\mu(A_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f\in\mathcal{L}^1$, alors $\int_X f\, 1_{A_n}\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Preuve Pour $n\in\mathbb{N}$ et $R\in\mathbb{R}^{+*}$ on peut écrire

$$\left|\int_X f\,1_{A_n}\,d\mu\right|\leq \int_X|f|\,1_{A_n}\,d\mu = \underbrace{\int_X \underbrace{|f|\,1_{\{|f|\leq R\}}}_{\leq R}\,1_{A_n}\,d\mu}_{\leq R\,\mu(A_n)} + \underbrace{\int_X|f|\,1_{\{|f|>R\}}\,1_{A_n}\,d\mu}_{B}$$

$$B\leq \int_X \underbrace{|f|\,1_{\{|f|>R\}}}_{\substack{\xrightarrow[R\to+\infty]{\mu\text{-pp}}\, 0 \\ \text{d'après la pté préc}}}\,d\mu \xrightarrow[R\to+\infty]{TCD} 0$$

en utilisant $|f|$ pour la dominat° (car $f\in L^1$ et indépendant de R)

Donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe $R \in \mathbb{R}^{+*}$ assez grand pour que $\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>R\}} \, d\mu \leq \varepsilon/2$; et puisque $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\mu(A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2R}$.

Ainsi $\forall n \geq N$, $\left|\int_X f \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2R} \times R + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

D'où $\int_X f \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. CQFD.

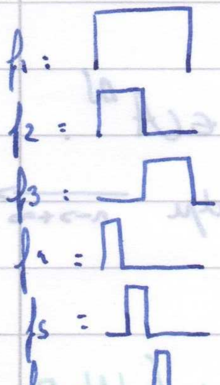
! Ne pas confondre $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ avec $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu pp} 0$.

III.3 ▪ Si $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mu pp} 0$ et si X est de mesure finie, alors $\mu(A_n) = \int_X \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par TCD, grâce à la dominat° de la f° cst $\equiv 1$.

Sans l'hypothèse de mesure finie sur X cela devient faux ex $X = \mathbb{R}$, $A_n = [n, n+1]$, $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ μpp mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = 1 \not\to 0$

▪ Si $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on ne peut pas en déduire que $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mu pp} 0$, même si X est de mesure finie comme le montre l'exemple suivant : $X = [0, 1]$.

Pour $\begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ n \in [0 .. 2^k[\end{matrix}$ $f_{2^k+n} = \mathbb{1}_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$.



On a $\mu(A_{2^k+n}) = \frac{1}{2^k}$ donc $\mu(A_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Pourtant $\forall x \in [0,1]$, $(\mathbb{1}_{A_p}(x))_{p \in \mathbb{N}}$ vaut 1 une infinité de fois donc ne tend pas vers 0.