Réf : Bauschke / Combettes
Convex Analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces

Minorante affine d'une fonction sci, cvx, propre.

Notations : On considère H un espace de Hilbert.
On note $\Gamma_0(H)$ l'ensemble des fonctions de H dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ convexes, s.c.i et propres (ie $\mathrm{dom}(f)\neq\emptyset$).

Rappel Si $f\in\mathcal{F}(H,\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ alors $f\in\Gamma_0(H)$ ssi $\text{épi}(f)$ est un $\left\{\begin{array}{l}\text{cvx}\\ \text{fermé}\\ \text{non vide}\end{array}\right.$ ce qui est fort pratique pour utiliser le théorème de projection, ou des résultats de séparation.

116.1 **Pté** Soit $f\in\Gamma_0(H)$. Soit $(x,\xi)\in H\times\mathbb{R}$. Soit $(p,\pi)\in H\times\mathbb{R}$.

1) $$(p,\pi)=P_{\text{épi}(f)}(x,\xi) \iff \begin{cases} \cdot\ f(p)\leq \pi & \star_1 \\ \cdot\ \xi \leq \pi & \star_2 \\ \cdot\ \forall y\in \mathrm{dom}(f)\ \langle y-p\,|\,x-p\rangle + (f(y)-\pi)(\xi-\pi)\leq 0 & \star_3 \end{cases}$$

2) Si de plus $x\in\mathrm{dom}(f)$ et $\xi<f(x)$ alors
$$(p,\pi)=P_{\text{épi}(f)}(x,\xi) \iff \begin{cases} \cdot\ f(p)= \pi & \star_1' \\ \cdot\ \xi < \pi & \star_2' \\ \cdot\ \forall y\in \mathrm{dom}(f)\ \langle y-p\,|\,x-p\rangle + (f(y)-\pi)(\xi-\pi)\leq 0 & \star_3 \end{cases}$$

Preuve D'après le th. de projection (cf sur 103.2) on a déjà
$$(p,\pi)=P_{\text{épi}(f)}(x,\xi) \iff \begin{cases} (p,\pi)\in \text{épi}(f) \\ \forall (y,t)\in\text{épi}(f),\ \langle (y,t)-(p,\pi)\,/\,(x,\xi)-(p,\pi)\rangle_{H\times\mathbb{R}}\leq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} f(p)\leq\pi & \star_1 \\ \forall (y,t)\in\text{épi}(f)\ \langle y-p\,|\,x-p\rangle_H + (t-\pi)(\xi-\pi)\leq 0 & \star_4 \end{cases}$$

or $\star_4 \Rightarrow \forall y\in\mathrm{dom}(f), \forall\lambda\in\mathbb{R}^+, \langle y-p\,|\,x-p\rangle + (f(y)+\lambda-\pi)(\xi-\pi)\leq 0$
$\Rightarrow \xi-\pi\leq 0$ (sinon en faisant $\lambda\to+\infty$ on a $+\infty\leq 0$!) $\Rightarrow \xi\leq\pi$ $\star_2$

et puisque $\forall y\in\mathrm{dom}(f), (y,f(y))\in\text{épi}(f)$ on a aussi $\star_4 \Rightarrow \forall y\in\mathrm{dom}(f), \langle y-p|x-p\rangle+(f(y)-\pi)(\xi-\pi)\leq 0$ $\star_3$

Donc $\star_4 \Rightarrow \begin{cases}\star_2\\ \star_3\end{cases}$.

Réciproquement si $(\xi-\pi)\leq 0$ $\forall y\in\mathrm{dom}(f), \forall\lambda\in\mathbb{R}^+$, $(f(y)+\lambda-\pi)(\xi-\pi)\leq (f(y)-\pi)(\xi-\pi)$

donc $\left.\begin{array}{l}\star_2\\ \star_3\end{array}\right\} \Rightarrow \star_4$.

On en déduit que $(p,\pi) = P_{\text{épi}(f)}(x,\xi) \iff \begin{cases} f(p) \le \pi \ (*_1) \\ \xi \le \pi \ (*_2) \\ (*_3) \end{cases}$

Puisqu'on a aussi clairement $\begin{cases} *_1' \Rightarrow *_1 \\ *_2' \Rightarrow *_2 \end{cases}$ il ne reste plus qu'à montrer que pour $x \in \text{dom}(f)$ et $\xi < f(x)$; ie pour $(x,\xi) \notin \text{épi}(f)$, et pour $(p,\pi) = P_{\text{épi}(f)}(x,\xi)$ on a bien $\begin{cases} *_1' \ (f(p) = \pi) \\ *_2' \ (\xi < \pi) \end{cases}$

En considérant $*_3$ au point p on a $(f(p)-\pi)(\xi-\pi) \le 0$.

Cela implique que si $f(p) < \pi$ alors $(\xi - \pi) \ge 0$, or $\underbrace{\xi \le \pi}_{*_2}$ donc $\xi = \pi$ et alors $*_3$ au point x se réécrit $\langle x-p \mid x-p \rangle \le 0$, autrement dit $\|x-p\|^2 \le 0$, soit $x = p$. On aurait $(x,\xi) = (p,\pi)$ alors que $(p,\pi) \in \text{épi}(f)$ et $(x,\xi) \notin \text{épi}(f)$ ABS.

On en déduit que $f(p) \ge \pi$, or $\underbrace{f(p) \le \pi}_{*_1}$ donc $f(p) = \pi$ $*_1'$.

Par le même raisonnem^t par l'absurde on a $\xi \ne \pi$, or $\underbrace{\xi \le \pi}_{*_2}$ donc $\xi < \pi$ $*_2'$ □.

116.2 **Pté** Si $f \in \Gamma_0(H)$, alors f admet une minorante affine

Preuve Puisque f est propre il existe $x \in \text{dom}(f)$ tq $f(x) \in \mathbb{R}$.

On peut donc choisir $\xi \in \mathbb{R}$ tq $\xi < f(x)$, ie tq $(x,\xi) \notin \text{épi}(f)$

On considère alors (p,π) le projeté de (x,ξ) sur $\text{épi}(f)$.

D'après ce qu'on vient de montrer on a $(\xi - \pi) < 0$ $(*_2')$

et $\forall y \in \text{dom}(f)$, $\langle y-p \mid x-p \rangle + (f(y)-\pi)(\xi-\pi) \le 0$ $(*_3)$

donc $\forall y \in \text{dom}(f)$, $\langle y-p \mid x-p \rangle \le (f(y)-\pi)\underbrace{(\pi-\xi)}_{>0}$

donc $\forall y \in \text{dom}(f)$ $\left\langle y-p \mid \frac{x-p}{\pi-\xi} \right\rangle \le f(y) - \pi$

soit $\forall y \in \text{dom}(f)$ $\langle y \mid \underbrace{\tfrac{x-p}{\pi-\xi}}_{:=u} \rangle + \underbrace{\pi - \left\langle p \mid \tfrac{x-p}{\pi-\xi} \right\rangle}_{:=c} \le f(y)$.

Ainsi $g = y \mapsto \langle y \mid u \rangle + c$ est une minorante affine de f. □