Différentiabilité de la conjuguée d'une fonction α-convexe.

On travaille dans H un espace de Hilbert (réel)
On note $\langle \mid \rangle$ son produit scalaire et $\| \ \|$ la norme associée.

120 **Pté** Soit $f \in \Gamma_0(H)$ ie $f \in \mathcal{F}(H, \overline{\mathbb{R}})$ convexe, sci et propre.
Si f est α-convexe (avec $\alpha > 0$)
alors f^* est différentiable.

Preuve Puisque f est α-convexe on sait qu'elle admet un unique minimiseur $\bar{x}$. En particulier on sait que $0 \in \partial f(\bar{x})$ et donc que $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\partial f)$. Ainsi $\mathrm{dom}(\partial f) \neq \emptyset$.
Soit $x \in \mathrm{dom}(\partial f)$. Soit $p \in \partial f(x)$.
Par α convexité de f on a donc $\forall y \; f(y) \geq f(x) + \langle p \mid y - x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$
Donc $\forall q \in H$,
$$
\begin{aligned}
f^*(q) &= \sup_{y \in H} (\langle y \mid q \rangle - f(y)) \\
&\leq \sup_{y \in H} \left(\langle y \mid q \rangle - f(x) - \langle p \mid y - x \rangle - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2\right) \\
&= \sup_{y \in H} \left(\langle y - x \mid q \rangle + \langle x \mid q \rangle - \langle p \mid y - x \rangle - f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2\right) \\
&= \underbrace{\sup_{y \in H} \left(\langle y - x \mid q - p \rangle - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2\right)} + \langle x \mid q \rangle - f(x)
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
&= \sup_{z \in H} \langle z \mid q-p \rangle - \frac{\alpha}{2}\|z\|^2 \\
&= \left(\frac{\alpha}{2}\|\cdot\|^2\right)^*(q-p) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\|q-p\|^2
\end{aligned}
$$
donc $\forall q \in H$, $f^*(q) \leq \langle x \mid q \rangle - f(x) + \frac{1}{2\alpha}\|q-p\|^2$.
Or puisque $p \in \partial f(x)$ on sait que $f^*(p) + f(x) = \langle x \mid p \rangle$
donc $\forall q \in H \quad f^*(q) \leq \langle x \mid q - p \rangle + \underbrace{\langle x \mid p \rangle - f(x)}_{f^*(p)} + \frac{\alpha}{2}\|q-p\|^2$

Le fait que $p \in \partial f(x)$ implique aussi que $x \in \partial f^*(p)$.
Donc $\forall q \in H \; f^*(q) \geq f^*(p) + \langle x \mid q - p \rangle$

En résumé on a $\forall q \in H$, $f^*(p) + \langle x | q-p \rangle \leq f^*(q) \leq f^*(p) + \langle x | q-p \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|q-p\|^2$.
Donc $\forall q \in H$, $f^*(q) = f^*(p) + \langle x | q-p \rangle + o(\|q-p\|)$.
Cela signifie bien que f^* est différentiable <u>en p</u> et $\nabla f^*(p) = x$.
Ainsi si $q \in im(\partial f)$, on sait RQ f^* est différentiable en q.
Pour montrer la différentiabilité de f^* en tout point il nous faut donc montrer la surjectivité de ∂f (en tant qu'opérateur)
Or on sait (cela découle de l'égalité de Fenchel-Legendre) que $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ donc MQ $im(\partial f) = H$ équivaut à MQ $dom(\partial f^*) = H$.
On a $\forall q \in H$, $f^*(q) \leq \langle q | x \rangle - f(x) + \frac{1}{2\alpha} \|p-q\|^2$
donc $\forall q \in H$, $f^*(q) < \infty$, autrement dit $dom(f^*) = H$.
Or f^* est convexe, sci, propre en tant que conjuguée d'une $f°$ elle même convexe, sci, propre ; donc on sait qu'en tout point de l'intérieur de son domaine elle admet une minorante affine exacte, ce qui assure en particulier que son sous-diff est non vide.
Ici on a donc $\forall q \in H = int(H) = int(dom(f^*))$, $\partial f^*(q) \neq \emptyset$.
Donc $dom(\partial f^*) = H$. On en déduit que $im(\partial f) = H$ et donc que f^* est bien différentiable en tout point de H.