Cone polaire

On se place dans $\mathcal{E}$ un espace euclidien.

121.1 **Déf** Si $K \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \setminus \{\emptyset\}$, K est un cône $\Leftrightarrow \forall k \in K, \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda k \in K$

aut. dit un cône est un ensemble stable par multiplica° par un réel strictement positif.

121.2 **Déf** Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$.
Le cône polaire de A, noté $A^{\ominus}$ est $\{x \in \mathcal{E} \mid \forall a \in A, a.x \leq 0\}$.

121.3 **Ptés** Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{E})^2$.

- $A \subset B \Rightarrow B^{\ominus} \subset A^{\ominus}$
- $(A \cup B)^{\ominus} = A^{\ominus} \cap B^{\ominus}$
- $A \subset A^{\ominus\ominus}$
- A SEV $\Rightarrow A^{\ominus} = A^{\perp} = \{x \mid \forall a \in A, a.x = 0\}$.

Preuve a). Soit $x \in B^{\ominus}$. Pour $a \in A$, $a \in B$ donc $a.x \leq 0$. Donc $x \in A^{\ominus}$
D'où l'inclusion $B^{\ominus} \subset A^{\ominus}$.

b) $x \in (A \cup B)^{\ominus} \Leftrightarrow \forall y \in A \cup B \;\; x.y \leq 0$
$\Leftrightarrow \forall y \in A \;\; x.y \leq 0$ et $\forall y \in B \;\; x.y \leq 0$
$\Leftrightarrow x \in A^{\ominus}$ et $x \in B^{\ominus}$
$\Leftrightarrow x \in A^{\ominus} \cap B^{\ominus}$.

c) Si $x \in A$, alors pour $y \in A^{\ominus}$ $x.y \leq 0$ (par déf de $y \in A^{\ominus}$)
donc $x \in (A^{\ominus})^{\ominus}$. D'où l'inclusion $A \subset A^{\ominus\ominus}$

d) Soit $x \in A^{\ominus}$. Si $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et on a aussi $-a \in A$.
alors on a $x.a \leq 0$ et $x.(-a) \leq 0$ donc néc $x.a = 0$. D'où $A^{\ominus} \subset A^{\perp}$
or $A^{\perp} \subset A^{\ominus}$ est toujours vraie.

121.4 **Pté** Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $A^{\ominus}$ est un cône convexe fermé non vide.

Preuve • Soit $x \in A^{\ominus}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall a \in A$ $\lambda x . a = \lambda \underbrace{(x.a)}_{\leq 0} \leq 0$ donc $\lambda x \in A^{\ominus}$

Ainsi $A^{\ominus}$ est un cône.

• Soit $(x,y) \in (A^{\ominus})^2$. Soit $\theta \in]0,1[$. $\forall a \in A$ $(\theta x + (1-\theta) y) . a = \theta \underbrace{(x.a)}_{\leq 0} + (1-\theta) \underbrace{(y.a)}_{\leq 0} \leq 0$

donc $\theta x + (1-\theta) y \in A^{\ominus}$. Ainsi $A^{\ominus}$ est convexe.

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A^{\ominus})^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x.

Puisque $\langle \cdot | a \rangle$ est une fonction continue, tout $a \in A$ on

a $\forall a \in A$ $x . a = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{x_n . a}_{\leq 0} \leq 0$ d'où $x \in A^{\ominus}$. Ainsi $A^{\ominus}$ est fermé

• $0 \in A^{\ominus}$ donc $A^{\ominus}$ est non vide.

121.5 **Pté** En notant, pour $A \in \mathcal{P}(E)$,

Conv(A) le convexe engendré par A (ie l'env. convexe)

Cone(A) le cône ———

CC(A) le cône convexe ——— on a

$$A^{\ominus} = (\text{Cône}(A))^{\ominus} = (\text{Conv}(A))^{\ominus} = (CC(A))^{\ominus} = (\bar{A})^{\ominus}$$

Preuve Puisque $A \subset \text{Cone}(A)$, $A \subset \text{Conv}(A)$, $A \subset \bar{A}$ et $A \subset CC(A)$

on a, d'après 121.3, $\text{Conv}(A)^{\ominus} \subset A^{\ominus}$ $\bar{A}^{\ominus} \subset A^{\ominus}$

$\text{Cone}(A)^{\ominus} \subset A^{\ominus}$ $CC(A)^{\ominus} \subset A^{\ominus}$.

Montrons les inclusions réciproques, en commençant par $A^{\ominus} \subset CC(A)^{\ominus}$.

Soit $x \in A^{\ominus}$. Soit $y \in CC(A)$, on sait qu'il existe alors $(a^i)_{i \in [1,\dots,m]} \in A^m$ et $(\lambda_i)_{i \in [1,\dots,m]} \in (\mathbb{R}^+)^m$ tq $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i$

Alors $x . y = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(x . a^i)}_{\leq 0 \text{ car } x \in A^{\ominus}}$ donc $x . y \leq 0$

d'où $x \in CC(A)^{\ominus}$. On a donc $A^{\ominus} \subset CC(A)^{\ominus}$ donc $A^{\ominus} = CC(A)^{\ominus}$.

Comme $\text{Cone}(A) \subset CC(A)$, $\text{Conv}(A) \subset CC(A)$, par 121.3, $A^{\ominus} = CC(A)^{\ominus} \subset \text{Conv}(A)^{\ominus}$

$A^{\ominus} = CC(A)^{\ominus} \subset \text{Cone}(A)^{\ominus}$

121.1

Il nous reste à montrer que $A^\ominus \subset (\bar{A})^\ominus$. Soit $x \in A^\ominus$.
Soit $y \in \bar{A}$. Par définition il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tq $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.
Alors $x.y = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{x.y_n}_{\leq 0 \text{ car } x \in A^\ominus}$ donc $(x.y) \leq 0$.

On en déduit que $x \in (\bar{A})^\ominus$ donc que $A^\ominus \subset (\bar{A})^\ominus$.

121.6 **Pté** Si K est un cône convexe fermé non vide
alors $K^{\ominus\ominus} = K$.

Preuve On a déjà l'inclusion $K \subset K^{\ominus\ominus}$.
Montrons l'inclusion réciproque en montrant que $K^c \subset (K^{\ominus\ominus})^c$.
Soit $x \in K^c$. Puisque K est un convexe fermé et $\{x\}$ un convexe compact on peut les séparer fortement. Il existe donc $a \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup\limits_{k\in K} a.k \leq \alpha < a.x$
Puisque K est un cône fermé (non vide) il contient 0 et cela implique en particulier $0 = a.0 \leq \sup\limits_{k\in K} a.k \leq \alpha$.
S'il existait $k \in K$ tel que $a.k > 0$, alors on aurait $a.tk \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ alors que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $tk \in K$ et $a.tk \leq \alpha$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\forall k \in K$, $a.k \leq 0$, autrement dit que $a \in K^\ominus$ et puisque $a.x > \alpha \geq 0$ que $x \notin K^{\ominus\ominus}$.
D'où $K^c \subset K^{\ominus\ominus c}$ soit $K^{\ominus\ominus} \subset K$ et donc $K = K^{\ominus\ominus}$.

121.7 **Cor** Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est non vide
alors $A^{\ominus\ominus}$ est le plus petit cône convexe fermé contenant A.

Preuve $A \subset A^{\ominus\ominus}$ et $A \neq \emptyset$ donc $A^{\ominus\ominus} \neq \emptyset$ et c'est bien un cône, cvx, fermé.
Montrons que c'est le plus petit contenant A : soit K un cône convexe fermé contenant A. Puisque $A \subset K$ et par 121.3 $A^{\ominus\ominus} \subset K^{\ominus\ominus}$.
Or K étant un cône convexe fermé non vide, $K^{\ominus\ominus} = K$, d'où $A^{\ominus\ominus} \subset K$.
donc $A^{\ominus\ominus}$ est bien le plus petit au sens de l'inclusion.