Description d'une face d'un polyèdre

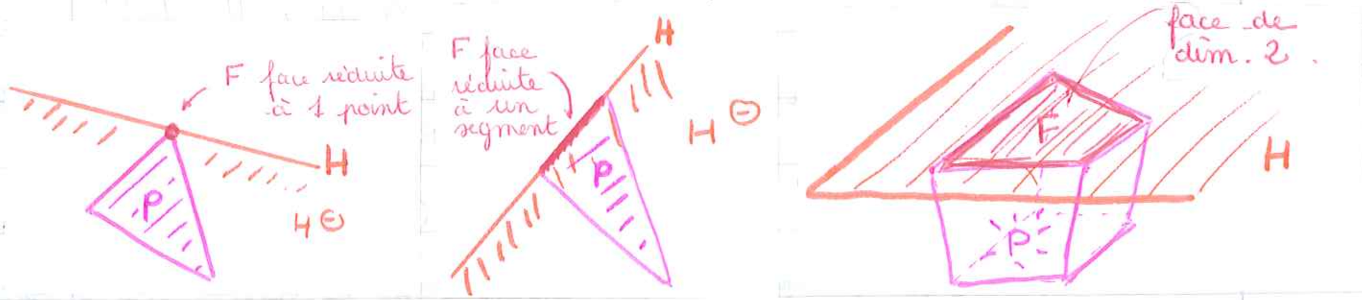
Soit E un espace euclidien.

123.0 **Rappels** • Un polyèdre est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces (affines), c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiant un nombre fini d'inégalités linéaires, c-à-d de la forme $u.x \leq \alpha$ pour $a \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$

• Un polyèdre est en particulier un convexe fermé.

• Un hyperplan d'appui d'un polyèdre P est un hyperplan H définissant les ½-espaces H^+ et H^-, tq $\begin{cases} P \subset H^+ \text{ ou } P \subset H^- \\ P \cap H \neq \emptyset . \end{cases}$

123.1 **Déf** L'intersection d'un polyèdre avec l'un de ses hyperplans d'appui est appelée face du polyèdre.
Par convention l'ensemble vide et le polyèdre tout entiers sont aussi des faces du polyèdre.

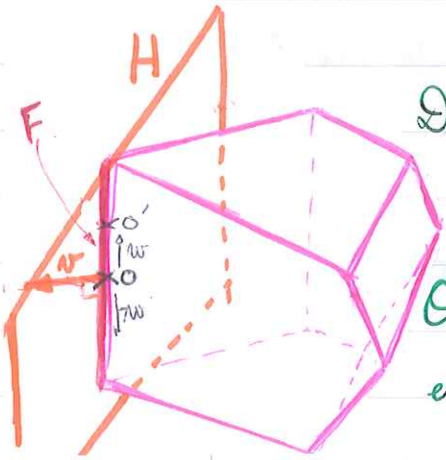


123.2 **Pté** Soit P le polyèdre défini par la famille (finie) d'inégalités $(x.u^i \leq \alpha_i)_{i \in I}$.
Si F est une face non vide de P
alors il existe $J \subset I$ tel que $F = P \cap \{x \in E \mid \forall j \in J,\ x.u^j = \alpha_j\}$

Autrem^t dit choisir une face non vide de P revient à choisir quelles inégalités doivent être satisfaites à l'égalité parmi celles utilisées pour définir P.

__Preuve__ : · Si $F = P$, on choisit $J = \emptyset$ ainsi $P \cap \{x \mid \forall j \in J, x.u^j = a_j\} = P \cap E = P$.
· Sinon il existe H un hyperplan affine tel que $F = P \cap H$.
Il existe alors $v \in E$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $H = \{x \in E \mid x.v = \beta\}$
On notera $\vec{H}$ la direction de cet espace affine càd $\vec{H} = v^{\perp}$.
On introduit $J = \{j \in I \mid \forall x \in F, x.u^j = \alpha^j\}$ l'ensemble des contraintes satisfaites à l'égalité par tous les points de la face. Par construction on a l'inclusion $F \subset P \cap \underbrace{\{x \mid \forall j \in J, x.u^j = \alpha^j\}}_{= \bigcap_{j \in J} H^j}$
On note, pour $j \in J$, $H^j = \{x \in E \mid x.u^j = \alpha^j\}$
$\vec{H^j} = \{x \in E \mid x.u^j = 0\}$

On veut donc montrer que $P \cap \bigcap_{j \in J} H^j \subset P \cap H \; (= F)$
Pour ramener ce problème affine à un problème vectoriel on considère une "origine" $o \in ri(F)$ $\left(ri(F) = \text{l'intérieur relatif de } F = (\mathrm{aff}(\overset{\circ}{F}) \cap F) \right.$
Puisque $o \in H$ on a $x \in H \Leftrightarrow x - o \in \vec{H}$.
$o \in \bigcap_{j \in J} H^j$ on a $x \in \bigcap_{j \in J} H^j \Leftrightarrow x - o \in \bigcap_{j \in J} \vec{H^j}$



Donc $\begin{cases} x \in P \cap \bigcap_{j \in J} H^j \Leftrightarrow x \in P \text{ et } x - o \in \bigcap_{j \in J} \vec{H^j} \\ x \in P \cap H \Leftrightarrow x \in P \text{ et } x - o \in \vec{H} \end{cases}$

On est donc ramené à MQ $\bigcap_{j \in J} \vec{H^j} \subset \vec{H} = \{v\}^{\perp}$,
et même $\bigcap_{j \in J} \vec{H^j} \subset \{v\}^{\ominus}$ suffit (car $\bigcap_{j \in J} \vec{H^j}$ est stable par passage à l'opposé, cf fin de la preuve)

Soit $w \in \bigcap_{j \in J} \vec{H^j}$ ie $\forall j \in J \; w.u^j = 0$; on veut MQ $w.v \leq 0$.
Pour cela on va montrer qu'on peut se décaler de o dans la direction de w, tout en restant dans P donc dans H^-, et puisque $o \in H$, cela assurera que ce déplacem^t^ $w \in \vec{H}^- = \{v\}^{\ominus}$
Pour cela on pose $\delta = \min\left\{ \dfrac{\alpha^i - o.u^i}{w.u^i} \mid i \in I \setminus J, \; w.u^i > 0 \right\}$
et on veut s'assurer que $\delta > 0$ (pour ensuite se déplacer de $\delta \times w$)
Par l'absurde supposons qu'il existe $i \in I \setminus J$ tq $o.u^i = \alpha^i$.
Par construction de J, et puisque i n'y appartient pas
il existe $p \in F$ tel que $p.u^i < \alpha^i$

Alors $(o-p).u^i = \underbrace{o.u^i}_{=\alpha_i} - \underbrace{p.u^i}_{<\alpha_i} > 0$.

Or par définition de l'intérieur relatif et puisque $(o-p) \in \overrightarrow{\mathrm{aff}(F)}$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ assez petit pour que $o+\varepsilon(o-p) \in F$
Or $(o+\varepsilon(o-p)).u^i = \underbrace{o.u^i}_{\alpha_i} + \varepsilon \underbrace{(o-p).u^i}_{>0} > \alpha_i$ ABSURDE !

Donc $\forall i \in I_{\setminus J}$, $\alpha_i - o.u^i > 0$.
Donc $\forall i \in I_{\setminus J}$ tq $w.u^i > 0$, $\frac{\alpha_i - o.u^i}{w.u^i} > 0$. D'où $\underline{\delta > 0}$.
On considère alors $o' = o + \delta w$ et on vérifie qu'il est dans P

→ $\forall j \in J$, $o'.u^j = \underbrace{o.u^j}_{=\alpha_j} + \delta \underbrace{w.u^j}_{=0} \leq \alpha_j$

→ $\forall j \in I_{\setminus J}$ tq $w.u^j > 0$; $\delta \times w.u^i \leq \alpha_i - o.u^i$ (par déf. de δ).
donc $o'.u^j = o.u^j + \delta \times w.u^j \leq \alpha_j$

→ $\forall j \in I_{\setminus J}$ tq $w.u^j \leq 0$, $o'.u^j = \underbrace{o.u^j}_{=\alpha_j} + \underbrace{\delta}_{\geq 0} \underbrace{w.u^j}_{\leq 0} \leq \alpha_j$.

Donc $o' \in P \subset H^-$, aut. dit $o'.v \leq \beta$ or $o.v = \beta$ car $o \in F \subset H$.
Donc $\delta w.v = (o'-o).v \leq 0$ d'où $w.v \leq 0$ (on utilise $\delta > 0$ ici !)
Mais si $w \in \bigcap_{j \in J} \overrightarrow{H^j}$, $-w \in \bigcap_{j \in J} \overrightarrow{H^j}$ et par le même raisonnem^t on obtient $-w.v \leq 0$. Nécessairem^t $v.w = 0$.
D'où $\bigcap_{j \in J} \overrightarrow{H^j} \subset \overrightarrow{H}$ et donc $P \cap \bigcap_{j \in J} H^j \subset P \cap H = F$.
Ainsi on a bien $F = P \cap \bigcap_{j \in J} H^j = \{x \in P \mid \forall j \in J, x.u^j = \alpha_j\}$.
□