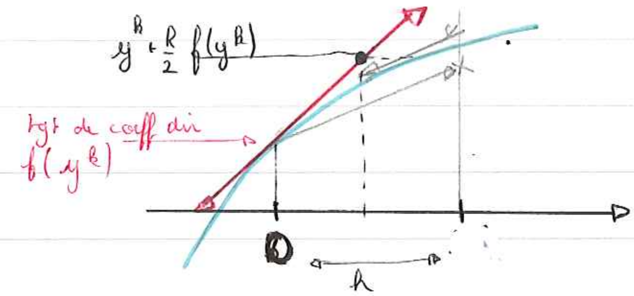
2.

Schéma du point milieu

Problème On cherche à approcher la solu° y de l'équa diff autonome $y' = f(y)$ avec sur $[0,T]$
f L-lpz et avec comme C.I $y(0) = y_0$

Définition du schéma On se donne un pas $h \in \mathbb{R}^{+*}$. On introduit $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\boxed{y^0 = y_0}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{\dfrac{y^{k+1} - y^k}{h} = f\left(y^k + \frac{h}{2} f(y^k)\right)}$

Pourquoi le point milieu ?



Erreur numérique $\boxed{e^k = y(kh) - y^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. rq $e^0 = 0$

Erreur de consistance $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{c^k = \dfrac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f\left[y(t_k) + \frac{h}{2} f(y(t_k))\right]}$

Théorème

Lemme $y \in C^3([0,T] \to \mathbb{R}) \Longrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^{+*}$ $\max\limits_{k \leq T} \|c^k\| \leq h^2 M$
aut. dit notre méthode est consistante d'ordre 2

Preuve : On utilise le développem^t de Taylor à l'ordre 3 de y en t_{k+1} et en t_k

$$y(t_{k+1}) = y(\underbrace{kh + h}_{(kh + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2}}) = y\left(kh + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} y'\left(kh + \frac{h}{2}\right) + \frac{(h/2)^2}{2!} y''\left(kh + \frac{h}{2}\right) + \frac{(h/2)^3}{3!} y'''(\theta_k) \text{ où } \theta_k \in h\left[k + \tfrac{1}{2}, k+1\right]$$

$$y(t_k) = y(\underbrace{kh}_{(kh + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2}}) = y\left(kh + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} y'\left(kh + \frac{h}{2}\right) + \frac{(h/2)^2}{2!} y''\left(kh + \frac{h}{2}\right) - \frac{(h/2)^3}{3!} y'''(\sigma_k) \text{ où } \sigma_k \in h\left[k, k + \tfrac{1}{2}\right]$$

ainsi $\dfrac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = \cancel{h} y'\left(kh + \frac{h}{2}\right) + 2 \times \dfrac{h^{\cancel{3}\,2}}{8} \times \dfrac{1}{6}\left[y'''(\theta_k) - y'''(\sigma_k)\right] = f\left(y\left(kh + \frac{h}{2}\right)\right) + \dfrac{h^2}{24}\left[y'''(\theta_k) - y'''(\sigma_k)\right]$

donc $\dfrac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f\left[y(t_k) + \frac{h}{2} f(y(t_k))\right] = \dfrac{h^2}{24} \underbrace{\left[y'''(\theta_k) - y'''(\sigma_k)\right]}_{\leq 2 \max_{[0,T]} \|y'''\|} + f\left(y\left(kh + \frac{h}{2}\right)\right) - f\left(y(t_k) + \frac{h}{2} f(y(t_k))\right)$

or f étant L-lpz $\underbrace{\left|f\left(y(hk+\frac{h}{2})\right) - f\left(y(hk) + \frac{h}{2} f(hk)\right)\right|}_{A} \leq L \left| y(hk + \frac{h}{2}) - y(hk) - \frac{h}{2} f(y(hk)) \right|$

or en développant (Taylor encore) $y(hk + \frac{h}{2}) = y(hk) + h/2 \underbrace{y'(hk)}_{f(y''(hk))} + \frac{h^2}{2} y''(hk)$

donc $A \leq L \left| \frac{h^2}{2} y''(hk) \right| \leq h^2 \frac{L}{2} \max_{[0,T]} |y''|$

Donc $|c^k| \leq h^2 \frac{\max_{[0,T]} |y'''|}{12} + h^2 \frac{L}{2} \max |y''| \leq C \times h^2$ avec $C = \frac{\max |y'''|}{12} + \frac{L}{2} \max |y''|$