Projecteurs orthogonaux sur l'image d'une application linéaire

22.1 **Pté** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $n \geq p$. Soit $A = [C_1, \dots C_p] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$(C_i)_{i\in[1..p]}$ est une famille libre orthogonale $\Rightarrow$ $A(A'A)^{-1}A' = \sum_{i=1}^{p} \frac{C_i C_i'}{C_i' C_i}$
Autrement dit le projecteur orthogonal sur $Im(A)$ est la somme des projecteurs orthogonaux sur "les colonnes"

Soit $(i,j) \in [1..p]^2$ $(A'A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A'_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{k,i} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} C_{ik} C_{jk} = C_i \cdot C_j$
$= \delta_{i,j} \|C_i\|^2$ (par orthogonalité des C_i).

donc $((A'A)^{-1})_{i,j} = \delta_{i,j} \frac{1}{\|C_i\|^2}$

Soit $(i,j) \in [1..p]\times[1..n]$ $((A'A)^{-1}A')_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (A'A^{-1})_{i,k} A'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{i,k} \frac{1}{\|C_i\|^2} A_{j,k}$
$= \frac{1}{\|C_i\|^2} A_{j,i}$

Soit $(i,j) \in [1..n]^2$ $(A(A'A)^{-1}A')_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} ((A'A)^{-1}A')_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_{i,k} A_{j,k}}{\|C_k\|^2}$

Soit $k \in [1..p]$, Soit $(i,j) \in [1..n]^2$: $(C_k C_k')_{i,j} = \sum_{l=1}^{1} (C_k)_{i,l} (C_k')_{l,j} = (C_k)_{i,1} (C_k)_{j,1} = A_{i,k} A_{j,k}$

Soit $(i,j) \in [1..n]^2$ $\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{C_k C_k'}{C_k' C_k}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{\|C_k\|^2} (C_k C_k')_{i,j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\|C_k\|^2} A_{i,k} \times A_{j,k}$

d'où l'égalité annoncée.
De plus $A(A'A)^{-1}A'$ est le projecteur orthogonal sur $Im(A)$ puisque les p colonnes indépendantes de A assurent que $rg(A) = p$ d'après 21.3.
Et d'après cette m̂ pté $P^{\perp}_{Vect(C_i)} = C_i (C_i'C_i)^{-1} C_i'$ or $C_i'C_i$ est un réel $C_i'C_i = \|C_i\|^2 \neq 0$ puisque $C \neq 0$
donc $(C_i'C_i)^{-1} = \left(\frac{1}{\|C_i\|^2}\right)$ d'où $\frac{C_i C_i'}{C_i' C_i}$ est le projecteur sur $Im(C_i) = Vect(C_i)$
et d'où la remarque.