Théorème de Lagrange

> Si H est un sous-groupe de G
> Alors $\text{card}(H) \mid \text{card}(G)$
> (pour G un groupe fini !)

Preuve : On introduit la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $xy^{-1} \in H$.

- Soit $x \in G$. $xx^{-1} = e \in H$ donc $x\mathcal{R}x$. $\mathcal{R}$ est reflexive.
- Soit $(x,y) \in G^2$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $xy^{-1} \in H$, alors $(xy^{-1})^{-1} \in H$ qui est "symetrisable" donc $yx^{-1} \in H$ soit $y\mathcal{R}x$. $\mathcal{R}$ est symetrique
- Soit $(x,y,z) \in G^3$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ on a $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$ donc $(xy^{-1}) \times yz^{-1} \in H$ soit $xz^{-1} \in H$ et $x\mathcal{R}z$. $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

Notons $(C_i)_{i \in [1..n]}$ les classes d'équivalences induites par $\mathcal{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $i \in [1..n]$. Il existe $y_i \in C_i$.

On pose $\varphi_i = \begin{pmatrix} C \to H \\ x \mapsto xy_i^{-1} \end{pmatrix}$ et $\psi_i = \begin{pmatrix} H \to C \\ h \mapsto hy_i \end{pmatrix}$

Soit $x \in C_i$. $\psi_i(\varphi_i(x)) = \psi_i(\underbrace{xy_i^{-1}}_{\in H \text{ par déf de } \mathcal{R}}) = xy_i^{-1}y_i = x$ donc $\psi_i \circ \varphi_i = Id_{C_i}$

Soit $h \in H$. $\varphi_i(\psi_i(h)) = \varphi_i(\underbrace{hy_i}_{\in C_i \text{ car } hy_iy_i^{-1} = h \in H \text{ donc } hy_i \mathcal{R} y_i}) = hy_iy_i^{-1} = h$ donc $\varphi_i \circ \psi_i = Id_H$.

On vient de montrer que C_i est en bijection avec H donc que $\forall i \in [1..n]$ $\text{Card}(C_i) = \text{Card } H$.

Puisque les classes d'équivalences forment une partition de l'ensemble de départ on a $\text{Card } G = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(H) = n\,\text{Card}(H)$

d'où $\text{Card}(H) \mid \text{Card } G$.