Méthode du point fixe

Problème On cherche à approcher un point fixe de $g \in C^1$ c-à-d une solution de $g(x)=x$.

Définition du schéma

x_0 fixé	$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = g(x_n)$

Différents cas

$\lvert g'(x^*)\rvert > 1$	point répulsif
$\lvert g'(x^*)\rvert = 1$	cas ambigu
$\lvert g'(x^*)\rvert < 1$	point attractif
$\lvert g'(x^*)\rvert = 0$	point super attractif $\to$ pour $g \in C^2$

où x^* est le point fixe

Cas répulsif. $|g'(x^*)|>1$ et g' est continue puisque $g\in C^1$. Donc il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in]x^*-r, x^*+r[$, $|g'(x)-g'(x^*)| \leq \dfrac{1+|g'(x^*)|}{2}$

alors $\forall x \in]x^*-r, x^*+r[$

$$|g'(x^*)| = |g'(x^*)-g'(x)+g'(x)| \leq |g'(x)-g'(x^*)| + |g'(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{|g'(x^*)|}{2} + |g'(x)|$$

D'où $|g'(x)| \geq \dfrac{|g'(x^*)|(1-\frac{1}{2})}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{|g'(x^*)|+1}{2} > 1$ car $|g'(x^*)|>1$.

Donc $\forall x \in]x^*-r, x^*+r[\quad |g'(x)|>1$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in]x^*-r, x^*+r[\Rightarrow |x_{n+1}-x^*| = |g(x_n)-g(x^*)| \overset{\text{par inégalité des accroissem}^{t} \text{ finis}}{\geq} |x_n - x^*|$

"Donc si on s'approche du point fixe on est repoussé"

$\Rightarrow$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Cas attractif $|g'(x^*)|<1$ et g' est continue puisque $g\in C^1$. Donc il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in [x^*-r, x^*+r]$, $|g'(x)-g'(x^*)| \leq \dfrac{1-|g'(x^*)|}{2}$

donc $|g'(x)| = |g'(x)-g'(x^*)+g'(x^*)| \leq |g'(x)-g'(x^*)| + |g'(x^*)| \leq \underbrace{\dfrac{1+|g'(x^*)|}{2}}_{a} < 1$

Puisque sur $F=[x^*-r, x^*+r]$ $|g'(x)| \leq a < 1$

on a g contractante sur ce fermé F.

De plus $\forall x \in F$, $|g(x)-x^*| = |g(x)-g(x^*)| \leq a|x-x^*| < r$ de $g(x)\in F$.

Puisque F est stable par g on peut utiliser le th du p^t fixe de Picard.

$\Rightarrow$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*

Cas superattractif $g'(x^*) = 0$. On suppose g de classe C^2.

Le développement de Taylor à l'ordre 2 donne

$$g(x_n) = g(x^*) + \cancel{\underbrace{(x_n - x^*) g'(x^*)}_{=0}} + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} g''(c)$$ où c compris entre x_n et x_n^*

Donc $|x_{n+1} - x^*| = |g(x_n) - g(x^*)| \leq |x_n - x^*|^2 \frac{M_2}{2}$

où M_2 est le max de g'' sur notre domaine.

Donc $\frac{M_2}{2} |x_{n+1} - x^*| \leq \left(\frac{M_2}{2} |x_n - x^*|\right)^2$

Par itération $\frac{M_2}{2} |x_n - x^*| \leq \left(\frac{M_2}{2} |x_0 - x^*|\right)^{2^n}$

et pour x_0 assez proche de x^* $\frac{M_2}{2} |x_0 - x^*| < 1$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge quadratiquement vers x^***

Cas ambigu exemple de cas **attractif**.

$g = \sin$ sur $[-\pi, \pi]$. 0 est l'unique pt fixe de g et $g'(0) = \cos(0) = 1$.

On introduit $f = \begin{pmatrix} [0,\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) - x \end{pmatrix}$. $\forall x \in [0,\pi]$ $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante sur $[0,\pi]$ or $f(0) = 0$: f est négative sur $[0,\pi]$.

Soit $x \in [0,\pi]$ $id(x) \geq 0$ $\sin(x) \geq 0$ et $\sin(x) \leq x$ donc $|\sin(x)| \leq |x|$.

Soit $x \in [-\pi, 0]$. $id(x) \leq 0$ $\sin(x) \leq 0$ donc $\left.\begin{array}{l} |id(x)| = -id(x) = id(-x) \\ |\sin(x)| = -\sin(x) = \sin(-x) \end{array}\right\}$ par imparité de ces fonctions

or $-x \in [0,\pi]$ donc $\sin(-x) \leq id(-x)$ soit $|\sin(x)| \leq |x|$.

Donc en posant $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $x_{n+1} = \sin(x_n)$ on a une suite dont la valeur absolue est décroissante et minorée par 0, ainsi dit $|x_n|$ converge et puisque $|\sin(x_n)| = \sin(|x_n|)$ on a $|x_{n+1}| = g(|x_n|)$ donc $|x_n|$ converge vers 0 seul pt fixe de g donc x_n aussi cv vers 0.

exemple de cas **répulsif**.

$g = sh$ sur $\mathbb{R}$ 0 est l'unique pt fixe de g et $g'(0) = ch(0) = 1$.

On introduit $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto sh(x) - x \end{pmatrix}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f'(x) = ch(x) - 1$ or $ch' = sh \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $ch(0) = 1$

donc $ch(x) \geq 1$ et $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$ or $f(0) = 0$ donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $id(x) \geq 0$ $sh(x) \geq 0$ et $sh(x) \geq x$ donc $|sh(x)| \geq |x|$

Soit $x \in \mathbb{R}^-$ $id(x) \leq 0$ $sh(x) \leq 0$ donc $\left.\begin{array}{l} |id(x)| = -id(x) = id(-x) \\ |sh(x)| = -sh(x) = sh(-x) \end{array}\right\}$ par imparité de id et sh

or $(-x) \in \mathbb{R}^+$ donc $id(-x) \leq sh(-x)$ soit $|x| \leq |sh(x)|$

Donc en posant $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = sh(x)$ on a une suite qui s'écarte de 0 (puisqu'à chaque rang la val. abs augmente).