Schémas numériques

31.0 On considère le problème de Cauchy (P) $\begin{cases} y(T_1) = y^0 \\ \forall t \in [T_1, T_2] \quad y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases}$

On suppose que $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ est tel que (P) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global.
On pose $T = T_2 - T_1$.

31.1 **Déf** Un schéma numérique pour (P) est défini par une fonction
$\Phi \in \mathcal{F}\left([T_1, T_2]^{p+q+1} \times (\mathbb{R}^m)^{p+q+1} \times [0, H], \mathbb{R}^m\right)$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $H \in \mathbb{R}^{+*}$.

Pour le pas de temps $h \in [0, H]$ le schéma s'écrit
$\forall n \in [0..N] \quad y_{n+1} = y_n + h\, \Phi\left((t_{n+i})_{i \in [-q..p]}, (y_{n+i})_{i \in [-q..p]}, h\right)$ où $N = \left\lfloor \frac{T}{h} \right\rfloor + 1$

Si $p = 0$ le schéma est dit explicite.
Si $p > 0$ le schéma est dit implicite.

$q+1$ est le nombre de pas du schéma.

Déf Soit y une solution de (P) et $h \in [0, H]$ un pas de temps. On pose $N = \lfloor T/h \rfloor + 1$
Les erreurs de consistances du schéma pour la solution y et le pas h sont
$\forall n \in [q..N-1] \quad \varepsilon_{n,h}(y) = y(t_{n+1}) - \left[y(t_n) + h\, \Phi\left((t_{n+i})_{i \in [-q..p]}, (y(t_{n+i}))_{i \in [-q..p]}, h\right) \right]$
Au rang n l'erreur de consistance représente la différence entre la vraie valeur de la solution y à l'instant t_{n+1} et l'approximation que fournit le schéma en supposant qu'il s'appuie sur des approximations exactes.

Déf Le schéma est consistant pour (P) ssi $\forall y$ solution de (P) $\sum_{n=q}^{N-1 = \lfloor T/h \rfloor} \|\varepsilon_{n,h}(y)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Déf Le schéma est consistant d'ordre $\sigma \in \mathbb{N}$ pour (P)
ssi $\forall y$ solution de (P), $\exists C \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, H] \ \sum_{n=q}^{N-1} \|\varepsilon_{n,h}(y)\| \le C h^{\sigma}$