K corps complet

L'espace $\ell^p(\mathbb{N})$

38.1 **Déf** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On note $|\ |$ la norme sur $\mathbb{K}$.

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \text{ est finie} \right\}$$

38.2 **Pté** Sous ces notations $\ell^p(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

démonstration : On montre que c'est un SEV de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

• $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$.

• Soit $(u,v)\in \ell^p(\mathbb{N})^2$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$.

$\forall N\in\mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^N |(\lambda u+v)_n|^p \le \sum_{n=0}^N (|\lambda||u_n|+|v_n|)^p \le \sum_{n=0}^N |\lambda|^p|u_n|^p + |v_n|^p = |\lambda|^p\sum_{n=0}^N|u_n|^p + \sum_{n=0}^N |v_n|^p \le |\lambda|^p \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p + \sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|^p$

Or puisque $u,v\in\ell^p(\mathbb{N})^2$ $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p<\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|^p<+\infty$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty}|(\lambda u+v)_n|^p$ est finie, car majorée, donc $(\lambda u+v)\in\ell^p(\mathbb{N})^2$. CQFD

38.3 **Pté** $\|\ \|_{\ell_p} = \left(\begin{array}{ccc} \ell^p(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{1/p} \end{array} \right)$ est une norme.

démonstration • $\forall u\in\ell^p(\mathbb{N})$ $\|u\|_{\ell^p}=0 \iff \|u\|_{\ell^p}^p = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p=0 \iff \forall n\in\mathbb{N}\ |u_n|^p=0$

$\iff \forall n\in\mathbb{N}\ |u_n|=0 \iff \forall n\in\mathbb{N}\ u_n=0 \iff u = 0_{\ell^p(\mathbb{N})}$

• Soit $(u,v)\in\ell^p(\mathbb{N})^2$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a déjà vu $\sum_{n=0}^N |(\lambda u+v)_n|^p \le |\lambda|^p \sum_{n=0}^N |u_n|^p + \sum_{n=0}^N|v_n|^p$.

Avec $\lambda=1$ on en déduit $\sum_{n=0}^N |(u+v)_n|^p \le \left(\sum_{n=0}^N (|u_n|^p)\right)^{\frac{1}{p}p} + \left(\sum_{n=0}^N |v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}p} \le \left(\underbrace{\left(\sum_{n=0}^N |u_n|^p\right)^{1/p}}_{\le \|u\|_p} + \underbrace{\left(\sum_{n=0}^N|v_n|^p\right)^{1/p}}_{\le\|v\|_p}\right)$

$\sum_{n=0}^{+\infty} |(u+v)_n|^p \le (\|u\|_p + \|v\|_p)^p$ soit $\|u+v\|_{\ell_p}^p \le (\|u\|_p+\|v\|_p)^p$

d'où l'inégalité triangulaire $\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$.

• Soit $u\in\ell^p(\mathbb{N})$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. $\|\lambda u\|_{\ell_p}^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |(\lambda u)_n|^p = \sum_{n=0}^{+\infty}(|\lambda||u_n|)^p = |\lambda|^p\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p = |\lambda|^p\|u$

donc $\|\lambda u\|_{\ell_p} = |\lambda|\|u\|_{\ell_p}$ c'est-à-dire qu'on a l'homogénéité.

38.4 **Pté** $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\ \|_{\ell_p})$ est complet

démonstration Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ une suite de Cauchy.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists N_0\in\mathbb{N}, \forall p,q\ge N_0, \|x_q-x_p\|_{\ell^p}\le\varepsilon$

$\forall j \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \ell^p(\mathbb{N})$ $\|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \geq |x_j|^p$ donc $\|x\|_{\ell^p} \geq |x_j|$.

Donc $\forall j \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_j \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_j, |x_m(j) - x_n(j)| \leq \varepsilon$

Donc $\forall j \in \mathbb{N}$, $(x_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ donc converge vers $l(j) \in \mathbb{K}$.

Revenons à l'écriture du fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, en se ramenant toutefois à la somme fi

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_0, \forall N \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=0}^{N} |x_n(j) - x_m(j)|^p \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |x_n(j) - x_m(j)|^p = \|x_n - x_m\|_{\ell^p}^p \leq \varepsilon^p$

En passant à la limite quand $m \to +\infty$ on obtient

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{N} |x_n(j) - l(j)|^p \leq \varepsilon^p$ donc

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ ———————, $\sum_{j=0}^{+\infty} |x_n(j) - l(j)|^p \leq \varepsilon^p$ donc

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0$ $\|x_n - l\|_{\ell^p} \leq \varepsilon$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers l dans $\ell^p(\mathbb{N})$

38.5 **Pté** $(\ell^p(\mathbb{N}), \| \ \|_{\ell^p})$ est un espace de Banach.

= 38.2 + 38.3 + 38.4.