Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie n.
Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Soit $(e_i)_{i\in[1..n]}$ une base de E. Soit $\| \,\|_E$ une norme sur E

On pose $I = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow E \\ (x_i)_{i\in[1..n]} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array} \right)$. I est bijective de réciproque $I^{-1} = \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \text{ses coord. ds } (e_i)_{i\in[1..n]} \end{array} \right.$

$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \|I(x)\|_E \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|e_i\|_E \le \|x\|_\infty M$ où $M = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_E$.

I est M-lpz, or celle est linéaire, cela suffit donc à assurer qu'elle est continue (cf 14)

On pose $m = \inf\{\|I(x)\| \mid x\in S_\infty(0,1)\}$.

Puisque $\| \,\|$ et I sont continues $\| \,\|\circ I$ est continue : or la sphère unité étant compacte, $\| \,\|\circ I$ atteint ses bornes sur $S_\infty(0,1)$, donc nécessairement $m \in \| \,\|\circ I\,(S_\infty(0,1))$ or sur $S_\infty(0,1)$ $\| \,\|\circ I$ ne s'annule pas : donc $m\in\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \quad \frac{\|I(x)\|_E}{\|x\|_\infty} = \left\|\frac{1}{\|x\|_\infty} I(x)\right\|_E = \left\|I\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)\right\|_E \geqslant m$ car $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0,1)$.

Puisque pour $x=0$ on a aussi $\|I(x)\|_E = \|0\|_E = 0 \geqslant m\times 0 = m\times\|x\|_\infty$ on a

$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \|I(x)\|_E \geqslant m\,\|x\|_\infty$

Soit $y\in E$. Il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $I(x)=y$ (et $x=I^{-1}(y)$).

On a alors $\|y\|_E \le M\,\|I^{-1}(y)\|_\infty$ et $\|y\|_E \geqslant m\,\|I^{-1}(y)\|$.

Vérifions que $y\mapsto \|I^{-1}(y)\|_\infty$ est une norme sur E.

- $\forall y\in E \quad \|I^{-1}(y)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow I^{-1}(y)=0 \Leftrightarrow y=0$
- $\forall (x,y)\in E^2, \quad \|I^{-1}(x+y)\|_\infty = \|I^{-1}(x)+I^{-1}(y)\|_\infty \le \|I^{-1}(x)\|_\infty + \|I^{-1}(y)\|_\infty$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}.\ \forall x\in E \quad \|I^{-1}(\lambda x)\|_\infty = \|\lambda I^{-1}(x)\|_\infty = |\lambda|\,\|I^{-1}(x)\|_\infty$

Ainsi $\| \,\|_\infty\circ I^{-1}$ est une norme et $\forall y\in E \quad m\,\|I^{-1}(y)\|_\infty \le \|y\|_E \le M\,\|I^{-1}(y)\|_\infty$

donc $\| \,\|_E$ est équivalente à $\| \,\|_\infty\circ I^{-1}$, et ce quelle que soit $\| \,\|_E$.

Puisque l'équivalence des normes est transitive on en déduit que toutes les normes sur E sont équivalentes