Transformée de Fourier inverse

$d \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Cadre On considère ici la transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^d$ ds $\mathbb{K}$ qu'on notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, définie comme étant
$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{K} \\ \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} \varphi(x) d\xi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

NB : On admet ici que $\mathcal{F}$ est linéaire continue.

59.1 **Déf** $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\quad \check{\varphi} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \varphi(-x) \end{pmatrix}$

Remarque : · $\check{\varphi}$ se lit "phi tchèche"
· Cette définition pourrait s'étendre à toutes les fonctions dont l'espace de départ est un groupe, c-à-d dans lequel l'opposé a bien un sens.

59.2 **Lemme** $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\quad \widehat{\check{\varphi}} = \check{\widehat{\varphi}}$

Preuve : C'est le lemme de dilatation (cf 57.1) avec $\lambda = -1$
Sinon on le refait rapidement. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$
$$\check{\widehat{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|-\xi)} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(-x|\xi)} \varphi(x) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi)} \varphi(-u) du = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi)} \check{\varphi}(u) du = \widehat{\check{\varphi}}(\xi)$$

59.3 **Pté** $\mathcal{F}$ est inversible d'inverse $\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \check{\widehat{\varphi}} \end{pmatrix}$

Preuve 1) MONTRER QUE $\mathcal{F} \circ \Psi = \Psi \circ \mathcal{F}$
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
$$\mathcal{F} \circ \Psi(\varphi) = \mathcal{F}((2\pi)^{-d} \check{\widehat{\varphi}}) = (2\pi)^{-d} \widehat{\check{\widehat{\varphi}}} = (2\pi)^{-d} \check{\widehat{\widehat{\varphi}}} = \Psi(\widehat{\varphi})$$
$$= \Psi \circ \mathcal{F}(\varphi)$$
D'où $\mathcal{F} \circ \Psi = \Psi \circ \mathcal{F}$. Il suffit donc de MQ $\Psi \circ \mathcal{F} = id$.

2) VÉRIFIER QUE $\Psi \circ \mathcal{F} = Id$ SUR LES GAUSSIENNES

On pose $G = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} e^{-(x|x)} \end{pmatrix}$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $G_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \frac{1}{\varepsilon^d} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{G_\varepsilon}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\xi|x)} G_\varepsilon(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} e^{-i(\xi\varepsilon|\frac{x}{\varepsilon})} e^{-(\frac{x}{\varepsilon}|\frac{x}{\varepsilon})} \frac{dx}{\varepsilon^d}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} e^{-i(\xi\varepsilon|u)} e^{-(u|u)} du$$ où $u = \frac{x}{\varepsilon}$, $du = \frac{dx}{\varepsilon^d}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} \widehat{e^{-1\|\cdot\|^2}}(\xi \times \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}^d}} \sqrt{\frac{\pi}{1}}^{\,d} e^{-\frac{1}{4\times 1}\|\xi\varepsilon\|^2}$$ cf 57.2

$$= e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\|\xi\|^2}$$

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\underline{\widehat{G_\varepsilon} = e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\|\cdot\|^2}}$ ★

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\Psi \circ \mathcal{F}(G_\varepsilon) = (2\pi)^{-d} \hat{\check{G_\varepsilon}} \underset{\substack{\text{car } G \text{ paire} \\ \text{dc } G_\varepsilon \text{ paire}}}{=} 2\pi^{-d} \widehat{(\widehat{G_\varepsilon})} \overset{★}{=} \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{e^{-\frac{\varepsilon^2}{4}\|\cdot\|^2}}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^d \left(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon^2/4}}\right)^d e^{-\frac{1}{4\varepsilon^2/4}\|\cdot\|^2}$$ cf 57.2

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon^2}}\right)^d e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}\|\cdot\|^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\|\frac{\cdot}{\varepsilon}\|^2} = G_\varepsilon.$$

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\underline{\Psi \circ \mathcal{F}(G_\varepsilon) = G_\varepsilon}$ △

3) TRAITER f QUELCONQUE PAR APPROXIMATION GAUSSIENNE

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Puisque la gaussienne $G \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|G\|_{L^1} = 1$ (cf pté 56.1), on peut, d'après 58.1, approximer f par ses convolutions avec les G_ε.

Plus explicitement $f = \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon * f$. (dans L^1, $G_\varepsilon * f$ converge pour $\|\ \|_{L^1}$)

a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\ \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\underline{\psi \circ \mathcal{F}(f * G_\varepsilon)(x)} = (2\pi)^{-d}\ \widehat{\widehat{f * G_\varepsilon}}(-x)$$

$$= (2\pi^{-d})\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x|\xi)}\ \widehat{f * G_\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

$$\boxed{} \quad = \underline{(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{d}} e^{i(x|\xi)}\ \hat{f}(\xi) \times \widehat{G_\varepsilon}(\xi)\, d\xi} \quad \text{cf } 60.$$

$$= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x|\xi)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y|\xi)} f(y)\, dy\ \widehat{G_\varepsilon}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left((2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y-x|\xi)}\ \widehat{G_\varepsilon}(\xi)\, d\xi\right) f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left((2\pi)^{-d}\ \widehat{\widehat{G_\varepsilon}}(y-x)\right) f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left((2\pi)^{-d}\ \check{\widehat{\widehat{G_\varepsilon}}}(x-y)\right) f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\psi \circ \mathcal{F}(G_\varepsilon)(x-y)}_{\triangle} f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} G_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

$$= (G_\varepsilon * f)(x)$$

d'où $\underline{\underline{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\ \psi \circ \mathcal{F}(f * G_\varepsilon) = G_\varepsilon * f = f * G_\varepsilon}}$

⚠ Ici pour conclure on peut être tenté d'utiliser la continuité de $\mathcal{F}$ et donc de $\psi \circ \mathcal{F}$. Mais attention on n'a pas montré ici que $G_\varepsilon * f$ cv vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mais seulement dans L^1.

On utilise plutôt le théorème de convergence dominée, sachant que

- $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \ \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{G_\varepsilon}(\xi) \underset{\star}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\frac{1}{4}\varepsilon^2 \|\xi\|^2} = 1$

  donc $\forall x \in \mathbb{R}^d \ \lim_{\varepsilon \to 0} e^{+i(x|\xi)}\hat{f}(\xi)\,\widehat{G_\varepsilon}(\xi) = e^{+i(x|\xi)}\hat{f}(\xi)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d\ |e^{+i(x|\xi)}\hat{f}(\xi)\,\widehat{G_\varepsilon}(\xi)| = |\hat{f}(\xi)| \times |e^{-\frac{1}{4}\varepsilon^2\|\xi\|^2}| \leq |\hat{f}(\xi)|$
- $\xi \mapsto \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Alors ... $\lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x|\xi)}\hat{f}(\xi)\,\widehat{G_\varepsilon}(\xi)\,d\xi}_{\parallel \text{ par } \boxed{}} = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x|\xi)}\hat{f}(\xi)\, d\xi$

$\forall x \in \mathbb{R}^d \ \lim_{\varepsilon \to 0} \overbrace{\psi \circ \mathcal{F}(f * G_\varepsilon)(x)} = (2\pi)^{-d}\ \hat{\hat{f}}(-x) = \psi \circ \mathcal{F}(f)(x)$

Or $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ $\Psi \circ \mathcal{F}(f * G_\varepsilon) = f * G_\varepsilon$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\lim_{\varepsilon \to 0} (f * G_\varepsilon)(x) = \Psi \circ \mathcal{F}(f)(x)$

Or puisque $f * G_\varepsilon$ cv vers f dans L^1 donc ~~$\forall pp\ x \in \mathbb{R}^d$ $\lim_{\varepsilon \to 0} (f * G_\varepsilon)(x) = f(x)$~~

~~D'où finalement~~ $\forall pp\ x \in \mathbb{R}^d$ $\Psi \circ \mathcal{F}(f)(x) = f(x)$

~~et par continuité de f comme de $\Psi \circ \mathcal{F}(f)$ on a~~ $\Psi \circ \mathcal{F}(f) = f$

CQFD!

59.4 **Lemme** $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\overline{\hat{\varphi}} = \widehat{\check{\overline{\varphi}}}$ ($\bar{\ }$ note la conjugaison dans $\mathbb{C}$)

Preuve $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ $\overline{\hat{f}}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x|\xi)} f(x)\,dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e^{-i(x|\xi)}}\, \overline{f(x)}\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(-x|\xi)} \overline{f(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi)} \overline{f(-u)}\,du$

$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(u|\xi)} \check{\overline{f}}(u)\,du = \widehat{\check{\overline{f}}}(\xi)$ d'où $\overline{\hat{f}} = \widehat{\check{\overline{f}}}$

59.5 **Pté** $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\|\varphi\|_{L^2}^2 = 2\pi^{-d} \|\hat{\varphi}\|_{L^2}^2$

Preuve Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $(2\pi)^{-d} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)\,d\xi$

$= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \times \widehat{\check{\overline{f}}}(\xi)\,d\xi$) 59.4

$= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\hat{f}}(\xi) \times \check{\overline{f}}(\xi)\,d\xi$) car $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$

par 59.3 $(2\pi)^{-d} \check{\hat{\hat{\varphi}}} = \varphi$

donc $\hat{\hat{\varphi}} = 2\pi^{-d} \check{\varphi}$

(car $\check{\check{\varphi}} = \varphi$)

$= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{d} \check{f}(\xi)\check{\overline{f}}(\xi)\,d\xi$

$= \int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(\xi)\, \overline{\check{f}}(\xi)\,d\xi$

$= \int_{\mathbb{R}^d} f(-\xi)\, \overline{f(-\xi)}\,d\xi$

$= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, \overline{f(+u)}\,du$

$= \|f\|_{L^2}^2$.