Propriétés des matrices conjuguées

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On note · $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

· $GL_n(\mathbb{K})$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.

69.1 **Déf** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

A et B sont <u>conjuguées</u> dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = P^{-1} B P$

Pté Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

69.2 · $\forall k \in \mathbb{N} \quad (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^k P$ (a)

69.3 · $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$ (b)

69.4 · $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ (c)

Preuve (a). Si $k=0$. $(P^{-1}AP)^0 = I_n$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$.

Si la propriété est vraie pour $k \in \mathbb{N}$.

$$(P^{-1}AP)^{k+1} = (P^{-1}AP^k) \times P^{-1}AP$$
$$= (P^{-1}A^k P) \times P^{-1}AP \quad \text{HR}$$
$$= P^{-1}A^k I_n AP$$
$$= P^{-1}A^{k+1}P.$$ d'où la propriété au rg $k+1$.

On conclut par récurrence □

(b) Il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in [0..d]} \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que $Q(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

Alors
$$Q(P^{-1}AP) = \sum_{i=0}^{d} a_i (P^{-1}AP)^i$$
$$= \sum_{i=0}^{d} a_i P^{-1}A^iP \quad \text{par A}$$
$$= P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{d} a_i A^i\right)P$$
$$= P^{-1}Q(A)P.$$ □

(c)
$$\exp(P^{-1}AP) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{(P^{-1}AP)^i}{i!} \underset{\text{par (b)}}{=} \lim_{k\to+\infty} P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!}\right)P = P^{-1}\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} P$$
$$= P^{-1}\exp(A)P.$$ □

69.5 **Pté** Deux matrices conjuguées ont même trace et même déterminant.

Preuve Soit $B = P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

- $\det(B) = \det(P^{-1}AP)$ car det morphisme

$$= \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P)$$

$$= \det(P^{-1}) \times \det(P) \times \det(A)$$ car $\mathbb{K}$ commutatif

$$= \det(P)^{-1} \times \det(P) \times \det(A)$$ car det morph.

$$= 1 \times \det(A).$$

D'où 2 matrices conjuguées ont même det.

- Cf. — $Tr(UV) = Tr(VU)$ pour $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$.

$$Tr(B) = Tr(P^{-1}AP) = Tr(P^{-1}(AP)) = Tr((AP)P^{-1})$$

$$= Tr(PP^{-1}A)$$

$$= Tr(I_n A)$$

$$= Tr(A).$$