Déterminant d'une exponentielle

71.1

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\det(\exp(A)) = \exp_{\mathbb{K}}(\mathrm{Tr}(A))$

Preuve • Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale.

Il existe $(\lambda_i)_{i \in [1..n]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp_{\mathbb{K}}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp_{\mathbb{K}}(\lambda_n) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Donc $\det(\exp(D)) = \prod_{i=1}^{n} \exp_{\mathbb{K}}(\lambda_i) = \exp_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \exp_{\mathbb{K}}(\mathrm{Tr}(D))$.
La propriété est donc vérifiée pour D.

• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonalisable.
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$.
A et D sont conjuguées donc (cf 69.5) $\underline{\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)}$.

$$\left.\begin{aligned} \exp(D) &= \exp(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}\exp(A)P \end{aligned}\right\} \text{(cf 69.4)}$$

Ainsi $\exp(D)$ et $\exp(A)$ sont aussi conjuguées, donc d'après 69.5, $\det(\exp(D)) = \det(\exp(A))$.
Or puisque D est diagonale $\det(\exp(D)) = \exp_{\mathbb{K}}(\mathrm{Tr}(D))$
Donc $\det(\exp(A)) = \exp_{\mathbb{K}}(\mathrm{Tr}(D)) = \exp_{\mathbb{K}}(\mathrm{Tr}(A))$.
La propriété est donc vérifiée pour A.

• La densité des matrices diagonalisables complexes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ainsi que la continuité des applications $\det$, $\exp$, $\exp_{\mathbb{K}}$, Tr, permettent d'étendre la propriété à toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et donc à celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notamment.

$\square$