Conjugué d'un stabilisateur

Soit X un ensemble non vide.
Soit G un groupe agissant sur X.

74.0 **Rappel** Pour $x \in X$, $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$.

74.1 **Pté** $\forall x \in X, \forall g \in G$, $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$

Preuve : Soit $g' \in \mathrm{Stab}(x)$.

$(gg'g^{-1}) \cdot (g \cdot x) = (gg'g^{-1}g) \cdot x = (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) \underset{\text{car } g' \in \mathrm{Stab}(x)}{=} g \cdot x$.

Donc $gg'g^{-1} \in \mathrm{Stab}(g \cdot x)$.

D'où $g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1} \subset \mathrm{Stab}(g \cdot x)$

Soit $g' \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$.

$g' = (gg^{-1})g'(gg^{-1}) = g\,(g^{-1}g'g)\,g^{-1}$

or $(g^{-1}g'g) \cdot (x) = (g^{-1}g') \cdot (g \cdot x) = g^{-1}\underbrace{(g' \cdot (g \cdot x))}_{\overset{\shortparallel}{g \cdot x} \text{ car } g' \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)} = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x$

i.e $g^{-1}g'g \in \mathrm{Stab}(x)$.

Donc $g' \in g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$

D'où $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) \subset g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$