Caractérisation d'une algèbre de Lie nilpotente

Déf Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

76.1 • La suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$ est définie par $\begin{cases} C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \forall n \geq 1, \ C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})] \end{cases}$

76.2 • $\mathfrak{g}$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$

76.3 **Pté** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

$\mathfrak{g}$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\forall (X_i)_{i \in [1..n]} \in \mathfrak{g}^n \ [X_n [X_{n-1} \dots [X_2, X_1] \dots] = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe $(h_i)_{i \in [1..n]}$ une suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $h_1 = \mathfrak{g}$, $h_n = \{0\}$ et $\forall i \in [1..n-1]$ $[\mathfrak{g}, h_i] \subset h_{i+1}$.

Preuve : Supposons $\mathfrak{g}$ nilpotente. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

* Soit $(X_i)_{i \in [1..n]} \in \mathfrak{g}^n$. $X_1 \in \mathfrak{g} = C^1(\mathfrak{g})$.

Si $i \in [1..n-1]$ tel que $[X_i [X_{i-1} \dots [X_2, X_1] \dots] \in C^i(\mathfrak{g})$ $[X_{i+1} [X_i \dots [X_2, X_1]] \dots] \in [\mathfrak{g}, C^i(\mathfrak{g})] = C^{i+1}(\mathfrak{g})$

Donc par itération on en déduit $[X_n [X_{n-1} \dots [X_2, X_1] \dots] \in C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

D'où $[X_n, [X_{n-1} \dots [X_2, X_1] \dots] = 0$.

* On pose $(h_i)_{i \in [1..n]} = (C^i(\mathfrak{g}))_{i \in [1..n]}$.

C'est bien une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ décroissante (cf pté de la suite centrale).

$h_1 = C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $h_n = C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ par hypothèse.

Enfin $\forall i \in [1..n-1]$, $[\mathfrak{g}, h_i] = [\mathfrak{g}, C^i(\mathfrak{g})] = C^{i+1}(\mathfrak{g}) = h_{i+1}$.

D'où la deuxième caractérisation.

Réciproquement : Supposons qu'il existe $(h_i)_{i \in [1..n]}$ une suite $\searrow$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que $h_1 = \mathfrak{g}$, $h_n = \{0\}$, $\forall i \in [1..n-1]$ $[\mathfrak{g}, h_i] \subset h_{i+1}$.

On a $\cdot$ $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} = h_1$

$\cdot$ Si $\underset{i<n}{\{} C^i(\mathfrak{g}) \subset h_i$ alors $C^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^i(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{g}, h_i] \subset h_{i+1}$.

Donc par récurrence on en déduit $\forall i \in [1..n]$, $C^i(\mathfrak{g}) \subset h_i$.

En particulier $C^n(\mathfrak{g}) \subset h_n = \{0\}$ soit $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. D'où $\mathfrak{g}$ résoluble.

Autre réciproque : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$\forall (X_i)_{i \in [1..n]} \in \mathfrak{g}^n$, $[X_n[X_{n-1}, \dots [X_2, X_1]] \dots] = 0$.

On introduit, pour $k \in [1..n]$ $A_k = \{ [X_k, [X_{k-1}, \dots [X_2, X_1] \dots]] \mid (X_i)_{i \in [1..k]} \in \mathfrak{g}^k \}$.
On montre par récurrence sur k que $\forall k \in [1..n]$ $C^k(\mathfrak{g}) \subset Vect(A_k)$

- $C^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} = A_1$. Donc la pté est bien vérifiée au rg 1
- Si $k \in [1..n-1]$ et $C^k(\mathfrak{g}) \subset Vect(A_k)$

Soit $x \in C^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^k(\mathfrak{g})] = Vect\{ [y, z] \mid (y,z) \in \mathfrak{g} \times C^k(\mathfrak{g}) \}$.
Il existe $(\lambda_i, y_i, z_i)_{i \in [1..p]} \in (\mathbb{K} \times \mathfrak{g} \times C^k(\mathfrak{g}))^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i [y_i, z_i]$.
Par hypothèse de récurrence pour tout $i \in [1..p]$ il existe
$(\mu_{i,j}, a_{i,j})_{j \in [1..n_i]} \in (\mathbb{K} \times A_k)^{n_i}$ tel que $z_i = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{i,j} a_{i,j}$.

Alors
$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left[y_i, \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{i,j} a_{i,j} \right]$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{i,j} \underbrace{[y_i, a_{i,j}]}_{\in A_{k+1}}}_{\in Vect(A_{k+1})}$$
D'où $C^{k+1}(\mathfrak{g}) \subset Vect(A_{k+1})$

On obtient par itération pour être exacte, $C^n(\mathfrak{g}) \subset Vect_{\mathbb{K}}(A_n)$.
Or par hypothèse $A_n = \{0\}$. Donc $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ et $\mathfrak{g}$ résoluble.