Théorème d'Engel

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Rappel Soit V un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie n.
Soit $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in[0..n]}$ une famille de SEV de V.

- $\mathcal{V}$ est un drapeau complet de V $\iff \begin{cases} V_0 = \{0\} \\ V_n = V \\ \forall i\in[0..n-1] \ V_i \subsetneq V_{i+1} \end{cases}$
- $b^{nilp}(\mathcal{V}) = \{u\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V) \mid \forall i\in[1..n] \ u(V_i)\subset V_{i+1}\} \trianglelefteq \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$

77.1 **Pté** Soit V un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie
Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$.
$\forall X\in\mathfrak{g}$, X est un endo. nilpotent de $V \implies V^{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$ où $V^{\mathfrak{g}} = \{v\in V \mid \forall X\in\mathfrak{g},\ X(v)=0\}$

Preuve V étant de dimension finie, $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ et à fortiori $\mathfrak{g}$ sont aussi de dimension finie.
On montre donc par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété

$$P_n : \left.\begin{array}{l} V\ \mathbb{K}\text{-EV de dim finie} \\ \mathfrak{g}\leq\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \\ \forall X\in\mathfrak{g},\ X \text{ nilp} \\ \dim(\mathfrak{g})\leq n \end{array}\right\} \implies V^{\mathfrak{g}}\neq\{0\}$$

1) MONTRER P_1

On considère V un $\mathbb{K}$-EV de dim finie et $\mathfrak{g}$ une ss. alg de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ de dimension 1 constituée uniquement d'endomorphismes nilpotents.

$\dim(\mathfrak{g}) = 1$. Donc il existe $X\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$. Alors $\mathfrak{g} = \mathbb{K}X$ et X étant nilpotent non nul il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases} X^{k-1}\neq 0 \\ X^k = 0\end{cases}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(X^k) = V$ et $X^{k-1}(\mathrm{Ker}(X^k)) = X^{k-1}(E)\neq\{0\}$.
Or $X^{k-1}(\mathrm{Ker}\,X^k)\subset\mathrm{Ker}\,X$. Donc $\mathrm{Ker}(X)\neq\{0\}$.
Or $\mathrm{Ker}(X) = \{v\in X \mid X(v)=0\} = \{v\in V \mid \forall\lambda\in\mathbb{K}\ (\lambda X)(v)=0\} = \{v\in V \mid \forall Y\in\mathfrak{g},\ g(v)=0\} = V^{\mathfrak{g}}$
D'où $V^{\mathfrak{g}}\neq\{0\}$. On a bien P_1.

2)

On suppose P_k vraie pour tout $k \leq n$.

On considère V un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ constitué de nilp, de dim $n+1$.

On veut MQ $\mathfrak{g}$ admet un idéal propre, on va en fait MQ une ss-alg. de Lie propre maximale pour l'inclusion est en fait un idéal (néc propre).

- $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$ donc un SEV de $\mathfrak{g}$ de dim 1 existe. C'est automatiquem^t une ss-alg de Lie.
  Ainsi $\mathfrak{g}$ admet bien une s.a.L propre, et puisque $\mathfrak{g}$ de dim finie on peut considérer $\mathcal{M}$ une s.a.L propre maximale de $\mathfrak{g}$.

- Si $(Y,Y') \in \mathfrak{g}^2$ avec $Y' = Y + M$ pr $M \in \mathcal{M}$, $[X,Y'] + \mathcal{M} = [X, Y+M] + \mathcal{M} = [X,Y] + \underbrace{[X,M]}_{\in \mathcal{M}} + \mathcal{M} = [X,Y] + \mathcal{M}$.

  On peut donc poser $\bar{ad} = \left(\begin{array}{l} \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathcal{M}) \\ X \longmapsto \left(\begin{array}{l} \mathfrak{g}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathcal{M} \\ Y + \mathcal{M} \longmapsto [\![X,Y]\!] + \mathcal{M} \end{array} \right) \end{array} \right)$.

  En notant π la projec° de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathcal{M}$, on a $\forall X \in \mathcal{M}$, $\bar{ad}_X \circ \pi = \pi \circ ad_X$

  De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathcal{M}$, $\bar{ad}_X^{\,k} \circ \pi = \pi \circ ad_X^{\,k}$.

  Ainsi on déduit de la nilpotence des éléments de $\mathcal{M}$ celle des élm^t de $\bar{ad}(\mathcal{M})$.

  De plus $\forall (X,Y,Z) \in \mathcal{M}^2 \times \mathfrak{g}$, $[\![\bar{ad}_X, \bar{ad}_Y]\!](Z) = (\bar{ad}_X \circ \bar{ad}_Y - \bar{ad}_Y \circ \bar{ad}_X)(Z) =$

$$= [\![X,[\![Y,Z]\!]]\!] - [\![Y,[\![X,Z]\!]]\!]$$
$$= [\![\,[\![X,Z]\!],Y\,]\!] + [\![X,[\![Y,Z]\!]]\!]$$
$$= [\![[\![X,Y]\!],Z]\!]$$
$$= \bar{ad}_{[\![X,Y]\!]}(Z)$$

  D'où $[\![\bar{ad}_X, \bar{ad}_Y]\!] = \bar{ad}_{[\![X,Y]\!]}$. On en déduit que $\bar{ad}$ est un morphisme d'algèbre de Lie, et par csq $\bar{ad}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathcal{M})$.

- On note $d = \dim(\mathfrak{g}')$ où $\mathfrak{g}' = \bar{ad}(\mathcal{M})$. $d \leq \dim(\mathcal{M}) < \dim(\mathfrak{g}) = n+1$.

$$\left. \begin{array}{l} V' = \mathfrak{g}/\mathcal{M} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-EV} \\ \mathfrak{g}' = \bar{ad}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V') \\ \forall X \in \bar{ad}(\mathcal{M}),\ X \text{ est nilp} \\ \dim(\mathfrak{g}') = d \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{par hypothèse de récurrence}]{\text{d'après } P_d} V'^{\mathfrak{g}'} \neq \{0\}.$$

On considère alors $\tilde{Y} \in V'^{\mathfrak{g}'} \setminus \{0\}$ et $Y \in \mathfrak{g}$ tq $\pi(Y) = \tilde{Y}$

- MQ $\mathcal{M} \cap \mathbb{K}Y = \{0\}$. Soit $X \in \mathcal{M} \cap \mathbb{K}Y$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $X = \lambda Y$.
  $\rightarrow \lambda = 0$ ou $\rightarrow \lambda \neq 0$ $Y = \frac{1}{\lambda} Z \in \mathcal{M}$ alors $\tilde{Y} = Y + \mathcal{M} = \frac{1}{\lambda} Z + \mathcal{M} = \mathcal{M} = \bar{0}$ IMP.
  D'où $\lambda = 0$ néc et $X = 0$.

- On pose $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \mathbb{K}Y$. $\mathcal{N}$ est un SEV de $\mathfrak{g}$. Montrons qu'il est aussi stable par crochet.

- $\forall X \in \mathcal{M},\ \pi([X,Y]) = \pi(\mathrm{ad}_X(Y)) = \overline{\mathrm{ad}}_X(\pi(Y)) = \overline{\mathrm{ad}}_X(\bar{Y}) = \bar{0}$ car $\bar{Y} \in (\mathfrak{g}/\mathcal{M})^{\overline{\mathrm{ad}}(\mathcal{M})}$ ($\overline{\mathrm{ad}}(X) \in \overline{\mathrm{ad}}(\mathcal{M})$).

autrement dit $\forall X \in \mathcal{M},\ [X,Y] \in \mathcal{M}$. ★

- Soit $(X,X') \in \mathcal{N}^2$. On peut écrire $X = \lambda Y + \mu M$, $X' = \lambda' Y + \mu' M'$ pour $(\lambda,\lambda',\mu,\mu') \in \mathbb{K}^4$ et $(M,M') \in \mathcal{M}^2$.

$[X,X'] = \lambda\lambda' \underbrace{[Y,Y]}_{=0} + \lambda\mu' \underbrace{[Y,M]}_{\in \mathcal{M}} + \lambda'\mu \underbrace{[M',Y]}_{\in \mathcal{M}} + \mu\mu' \underbrace{[M,M']}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Ainsi $\mathcal{N}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, strictement plus grande que $\mathcal{M}$. Par maximalité de $\mathcal{M}$ en tant que sous-algèbre de Lie propre de $\mathfrak{g}$ on en déduit que $\mathcal{N}$ n'est pas propre : soit $\mathfrak{g} = \mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \mathbb{K}Y$.
$\mathcal{M}$ est donc un idéal de $\mathfrak{g}$ en tant que sous-alg. de Lie stable par "crochet externe" d'après ★

Cl : $(P_k)_{k \le n} \Rightarrow \forall V$ $\mathbb{K}$-EV de dim finie, $\forall \mathfrak{g} \le \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, $\dim(\mathfrak{g}) \le n+1$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ admet un idéal propre.
($\mathfrak{g}$ constituée de nilp)

3)

Supposons P_k pour $k \le n$.

On considère V un $\mathbb{K}$-EV de dim finie et $\mathfrak{g} \le \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ de dimension $n+1$, constituée de nilp.

D'après 2) on considère $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ un idéal propre de $\mathfrak{g}$.

On a $\mathfrak{h} \le \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, $\mathfrak{h}$ constitué de nilpotents et $\dim(\mathfrak{h}) < \dim(\mathfrak{g}) = n+1$, soit $\dim(\mathfrak{h}) \le n$.

Par hypothèse de récurrence on a donc $V^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$.

Montrons que $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$

- $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ a-t-il bien un sens ?

Si $v \in V^{\mathfrak{h}}$, $(Y',Y) \in \mathfrak{g}^2$, $Z \in \mathfrak{h}$ tq $Y' = Y + Z$. $Y'(v) = Y(v) + \underbrace{Z(v)}_{=0 \text{ car } Z \in \mathfrak{h} \text{ et } v \in V^{\mathfrak{h}}} = Y(v)$

On peut donc passer à $\pi(Y)(v) = Y(v)$. Ainsi $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \{ v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{h}\ X(v) = 0, \forall \bar{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}\ \bar{Y}(v) = 0 \}$

- Soit $v \in V^{\mathfrak{g}}$. A fortiori $v \in V^{\mathfrak{h}}$ et $\forall X \in \mathfrak{g}$ $X(v) = 0$ donc $\pi(X)(v) = 0$, d'où $v \in (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$. Donc $V^{\mathfrak{g}} \subset (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$
- Soit $v \in (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$. $\forall X \in \mathfrak{g}$, $X(v) = \pi(X)(v) = 0$ donc $v \in V^{\mathfrak{g}}$. D'où $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \subset V^{\mathfrak{g}}$

Par double inclusion $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

On pose alors $V' = V^{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. V' est un $\mathbb{K}$-EV, $\mathfrak{g}' \le \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V^{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V')$

et $\mathfrak{g}'$ est constitué de nilpotent car $\mathfrak{g}$ l'était. Enfin $\dim(\mathfrak{g}') \le n$ donc on peut appliquer l'H.R. : $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = (V')^{\mathfrak{g}'} \neq \{0\}$. Soit : $V^{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$. d'où P_{n+1}. d'où l'hérédité.

On conclut que la propriété est vraie par récurrence.

7.1.2 **Théorème d'Engel**

Soit V un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie.
Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ constituée d'endomorph. nilpotents.
Il existe un drapeau $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{nilp}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$

Preuve : On le montre par récurrence sur $\dim(V)$.

· Si $\dim(V) = 1$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $X = \left(\begin{smallmatrix} V \to V \\ v \mapsto \lambda v \end{smallmatrix} \right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X^n = v \mapsto \lambda^n v$.
donc $\forall X \in \mathfrak{g}$, X nilp $\Leftrightarrow X = 0$. Donc néc $\mathfrak{g} = \{0\}$.
De plus le seul drapeau possible est $\mathcal{V} = (\{0\}, V)$.
Comme on a bien $\{0\} \in \mathfrak{b}^{nilp}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$ la pté est vérifiée au rang 1.

· Si $\dim(V) > 1$ et si la propriété est vérifiée pour les dimensions plus petites.
D'après la pté précédente $V^{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$. Soit $w \in V^{\mathfrak{g}} \setminus \{0\}$. On pose $V' = V/\mathbb{K}\langle w \rangle$.
$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall (v, v', \lambda) \in V^2 \times \mathbb{K}$ $v' = v + \lambda w \Rightarrow X(v') = X(v + \lambda w) = X(v) + \lambda \underbrace{X(w)}_{=0} = X(v)$.
On peut donc introduire $\varphi \left(\begin{array}{l} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V') \\ X \mapsto \left(\begin{array}{c} V' \longrightarrow V' \\ v + \mathbb{K}\langle w \rangle \longmapsto X(v) + \mathbb{K}\langle w \rangle \end{array} \right) \end{array} \right)$

$$\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}^2\ \forall v \in V,\ \varphi([\![X,Y]\!])(\bar{v}) = \overline{[\![X,Y]\!](v)} = \overline{X \circ Y(v) - Y \circ X(v)} = \overline{X(Y(v))} - \overline{Y(X(v))} = \varphi(X)(\overline{Y(v)}) - \varphi(Y)(\overline{X(v)})$$
$$= \varphi(X)(\varphi(Y)(\bar{v})) - \varphi(Y)(\varphi(X)(\bar{v})) = (\varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X))(\bar{v})$$
$$= [\![\varphi(X), \varphi(Y)]\!](v).$$

Donc φ est un morphisme d'algèbre de Lie.
Ainsi $\mathfrak{g}' = \varphi(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V')$.
De plus $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $X^n = 0$ or $\varphi(X^n) = \varphi(X)^n$ dc $\varphi(X)$ nilpotent.
Donc $\forall X \in \mathfrak{g}'$, X nilp. Et puisque $\dim(V') = \dim(V) - 1$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On en déduit qu'il existe $\mathcal{V}' = (\mathcal{V}_i')_{i \in [0..n-1]}$ un drapeau complet de V' tq $\forall X \in \mathfrak{g}'$, $\forall i \in [1..n]$ $X(\mathcal{V}_i') \subset \mathcal{V}_{i-1}'$
On pose alors $\mathcal{V}_0 = \{0\}$ et $\forall i \in [1..n]$ $\mathcal{V}_i = \pi^{-1}(\mathcal{V}_{i-1}')$. En particulier $\mathcal{V}_n = \pi^{-1}(\mathcal{V}_{n-1}') = \pi^{-1}(V') = V$.
. $\mathcal{V}_1 = \pi^{-1}(\mathcal{V}_0') = \pi^{-1}(\{\bar{0}\}) = \mathbb{K}\langle w \rangle$ donc $\mathcal{V}_0 = \{0\} \subset \mathcal{V}_1$.
· Soit $i \in [1..n-1]$ $\mathcal{V}_i = \pi^{-1}(\mathcal{V}_{i-1}') \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{V}_i') = \mathcal{V}_{i+1}$ puisque $\mathcal{V}_{i-1}' \subset \mathcal{V}_i'$.
Puisque $\mathcal{V}_{i-1}' \neq \mathcal{V}_i'$ il existe $\bar{x} \in \mathcal{V}_i' \setminus \mathcal{V}_{i-1}'$ donc $x \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}_{i-1}$ dc $\mathcal{V}_i \neq \mathcal{V}_{i-1}$ $\Big]$ $\mathcal{V}_{i-1} \subsetneq \mathcal{V}_i$

Donc $\mathcal{V}$ est un drapeau complet de V. Montrons qu'il "triangulise" ts les élm' de $\mathfrak{g}$.
Soit $i \geq 2$ Soit $X \in \mathfrak{g}$. Soit $v \in \mathcal{V}_i$. En notant π la projection sur V' on a $\varphi(X)(\pi(v)) \in \underbrace{\varphi(X)}_{\in \mathfrak{g}'}(\mathcal{V}_{i-1}') \subset \mathcal{V}_{i-2}'$
Or $\varphi(X)(\pi(v)) = \pi(X(v))$ donc $X(v) \in \mathcal{V}_{i-1}$. Si $v \in \mathcal{V}_1$, $\pi(v) \in \mathcal{V}_0' = \{\bar{0}\}$ donc $v \in \mathbb{K}\langle w \rangle \subset V^{\mathfrak{g}}$
donc $X(v) = 0$ soit $X(v) \in \mathcal{V}_0$. Donc $\forall i \in [1..n]$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ $X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}$.
D'où la pté pour V. On conclut par réc.