Théorèmes de Stone-Weierstraß

cf Hirsch Lacombe p 28-30

Soit (X, d) un espace métrique compact.
Soit H un ensemble de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

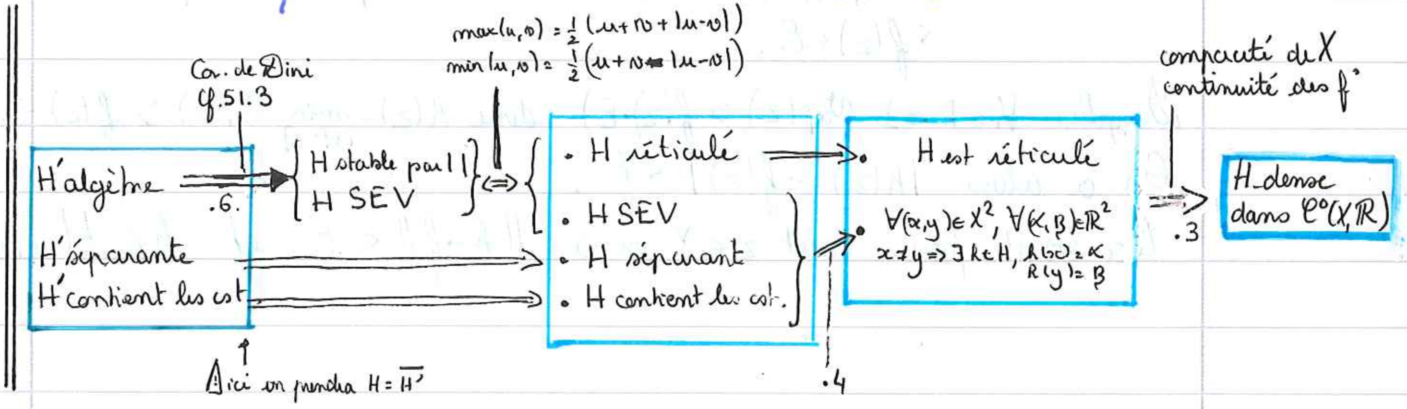
Il s'agit ici de donner des conditions sur H pour assurer sa densité dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Donnons d'abord des définitions pour exprimer ces conditions.

8.0 **Déf.** H est réticulé $\iff \forall (u,v) \in H^2$, $\min(u,v) \in H$ et $\max(u,v) \in H$

8.1 • H est séparant $\iff \forall (x,y) \in X^2$, $x \neq y \Rightarrow \exists h \in H$ $h(x) \neq h(y)$.

Donnons maintenant un aperçu schématique de l'articulation entre les résultats que nous allons donner et démontrer.

8.2



8.3 **Pté**
$$\left.\begin{array}{l} H \text{ est réticulé} \\ \forall (x,y) \in X^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \; x \neq y \Rightarrow \exists h \in H \;\; h(x) = \alpha \text{ et } h(y) = \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow H \text{ dense dans } \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On cherche $h \in H$ tel que $\|f - h\| \leq \varepsilon$.
D'après la deuxième hypothèse pour tout $x \in X$ et tout $y \in X \setminus \{x\}$ il existe $u_{x,y} \in$ tel que $u_{x,y}(x) = f(x)$ et $u_{x,y}(y) = f(y)$.
Considérons x fixé. Pour tout $y \in X \setminus \{x\}$ on pose $U_y = \{z \in X \mid u_{x,y}(z) > f(z) + \varepsilon\}$.

$U_y = (u_{x,y} - f)^{-1}(]\varepsilon, +\infty[)$ est ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par $u_{x,y} - f$ qui est continue. De plus $(x,y) \in U_y{}^2$.

Ainsi $\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$ est un recouvrement de X par des ouverts.

Par compacité de X on peut en extraire un sous-recouvrement fini qu'on note $\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$.

H étant réticulé il est par définition stable par passage au max en deux éléments, et en itérant sur un nombre fini d'éléments.

On a alors $v_x = \max\{u_{x,y_i} \mid i \in [1..n]\} \in H$. (puisque chaque $u_{x,y_i} \in H$).

Soit $z \in X$. $v_x(z) \geq u_{x,y_i}(z)$ pour tout $i \in [1..n]$ donc en particulier pour i tq $z \in U_{y_i}$
$> f(z) - \varepsilon$.

Donc $\begin{cases} v_x \in H \\ v_x > f - \varepsilon \\ v_x(x) = f(x) \end{cases}$. Considérons maintenant x variable.

On pose pour chaque $x \in X$, $V_x = \{z \in X \mid v_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$

C'est un ouvert qui contient x. Ainsi $\bigcup_{x \in X} V_x$ est un rec. du compact X par des ouverts, on en extrait le ss-rec. fini $\bigcup_{i=1}^{s} V_{x_i}$. On pose $h = \min\{v_{x_i} \mid i \in [1..s]\}$.

$h \in H$ en tant que min d'un nombre fini d'éléments de h.

Soit $z \in X$. $h(z) \leq v_{x_i}(z)$ pour $\forall i \in [1..s]$ donc en particulier pour i tq $z \in V_{x_i}$
$< f(z) + \varepsilon$.

De plus $\forall i \in [1..s]$ $v_{x_i}(z) > f(z) - \varepsilon$ donc $h(z) = \min_{i \in [1..s]} v_{x_i}(z) > f(z) - \varepsilon$.

On a alors $|h(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Ceci étant pour tout $z \in X$ on a $\|h - f\| < \varepsilon$ et $h \in H$ CQFD.

8.4 <u>lemme</u> $\left.\begin{array}{l} H \text{ SEV} \\ H \text{ séparant} \\ H \text{ contient les cst} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall (x,y) \in X^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow \exists h \in H$ $\begin{array}{l} h(x) = \alpha \\ h(y) = \beta \end{array}$

<u>Preuve</u> Soit $(x_1,x_2) \in X^2$ tel que $x \neq$. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque H est séparant il existe $g \in H$ tel que $g(x_1) =: c_1 \neq c_2 := g(x_2)$.

$x \mapsto \frac{g(x_1)}{c_2 - c_1}$ et $x \mapsto \frac{g(x_2)}{c_1 - c_2}$ sont de H car cst.

Puisque H est SEV $h := x \mapsto \beta \frac{g(x) - g(x_1)}{c_2 - c_1} + \alpha \frac{g(x) - g(x_2)}{c_1 - c_2}$ est dans H en tant que CL d'éléments de H et vérifie

$h(x_1) = \beta \times 0 + \alpha \frac{g(x_1) - g(x_2)}{c_1 - c_2} = \alpha$ et $h(x_2) = \beta$. CQFD.

8.5 **Pté** $\left.\begin{array}{l}H \text{ réticulé} \\ H \text{ SEV} \\ H \text{ séparant} \\ H \text{ contient les cst}\end{array}\right\} \Rightarrow H$ est dense ds $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Corolaire immédiat du .3 et .4

8.6 **Lemme** H est une algèbre $\Rightarrow \overline{H}$ est stable par passage à la valeur absolue

Preuve L'idée est d'écrire la valeur absolue d'une fonction comme limite uniforme de polynômes en cette fonction, car H est stable par passage au polynôme (ie la transformation $u \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$ ou $u^i \neq u \circ u^{i-1}$ mais $u^i = x \mapsto (u(x))^i$) puisque c'est une algèbre (ie stable par CL et multiplication).

Soit $f \in H$. $\tilde{f} := x \mapsto \frac{f(x)}{\|f\|} \in H$ et $\tilde{f}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$.

On utilise ici une application du th. de Dini (cf 51.3) qui donne l'existence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ telle que les fonctions polynomiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées cv. unif vers la valeur absolue sur $[-1, 1]$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\|f\| \times p_n \circ \tilde{f})_{n\in\mathbb{N}}$ cv alors unif vers $\|f\| \times |\tilde{f}| = \|f\| \times \left|\frac{f}{\|f\|}\right| = |f|$

et puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n = \|f\| \times P_n(\tilde{f})$ on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$. Donc $|f| = \lim f_n \in \overline{H}$.

8.7 **Théorème de Stone Weierstraß réel** $\left.\begin{array}{l}H \text{ algèbre} \\ H \text{ séparante} \\ H \text{ contenant les cst}\end{array}\right\} \Rightarrow H$ dense ds $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Preuve D'après le lemme précédent $\overline{H}$ est stable par passage à la valeur absolue, de plus $\overline{H}$ est comme H un SEV. Grâce aux relations

$\begin{cases} \max(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + |u-v|) \\ \min(u, v) = \frac{1}{2}(u + v - |u-v|) \end{cases}$ on en déduit que $\overline{H}$ est réticulé.

Comme $\overline{H}$ est séparante et contient les constantes puisque H vérifiait déjà ces deux propriété on en déduit que $\overline{H}$ vérifie toutes les hypothèses de la pté ci-dessus, donc $\overline{H}$ dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ soit $\overline{H} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ donc H dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Soit maintenant H un ensemble de fonctions continues de X ds $\mathbb{C}$

8.8 **Théorème de Stone-Weierstraß complexe**

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ algèbre (sur } \mathbb{C}) \\ H \text{ séparante} \\ H \text{ contient les cst} \\ H \text{ stable par conjugaison} \end{array}\right\} \Rightarrow H \text{ dense dans } \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$$

Preuve Posons $H_{\mathbb{R}} = \{h \in H \mid \forall x \in X \ h(x) \in \mathbb{R}\}$.

- $H_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ qui contient les $\mathbb{R}$-constantes.
- Pour $f \in H$. $Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in H$ car stable par CL et conjugaison.
  De même $\forall f \in H$ $Im(f) \in H$ car $Im(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Donc $\forall h \in H$, $Re(f) \in H_{\mathbb{R}}$, $Im(f) \in H_{\mathbb{R}}$
  Soit $(x,y) \in X^2$ tel que $x \neq y$. Il existe $f \in H$ tel que $f(x) \neq f(y)$ puisque H sépare les points. On a alors $Re(f)(x) \neq Re(f)(y)$ ou $Im(f)(x) \neq Im(f)(y)$.
  Dans tous les cas $H_{\mathbb{R}}$ contient une fonction séparant x et y.
  On peut donc appliquer le th. de Stone-Weierstraß réel à $H_{\mathbb{R}}$.
  $\overline{H_{\mathbb{R}}} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.
  Or $H_{\mathbb{R}} \subset H$ et $iH_{\mathbb{R}} \subset iH = H$ donc $H_{\mathbb{R}} + iH_{\mathbb{R}} \subset H$
  donc $\overline{H_{\mathbb{R}}} + i\overline{H_{\mathbb{R}}} \subset \overline{H}$ soit $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) + i\,\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \subset \overline{H}$.
  Or tte fc° continue de X ds $\mathbb{C}$ se décompose en une partie réelle continue $+ i \cdot$ sa partie imaginaire continue donc $\mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) + i\,\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.
  On a donc $\mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \subset \overline{H} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ et finalem^t $\overline{H} = \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.